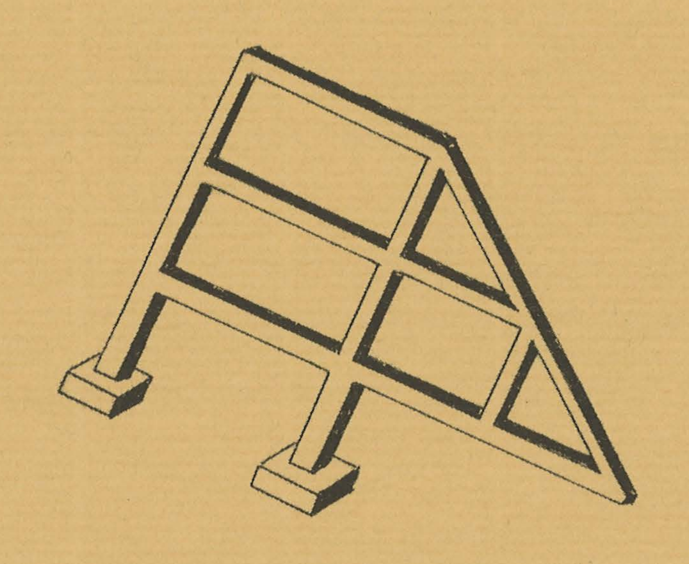
MÉTODOS DE LAS SY Y DE LAS ROTACIONES
DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

(III)

por

JOSÉ MOLINA DOMINGUEZ



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-58-03

MÉTODOS DE LAS SY Y DE LAS ROTACIONES

DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

(III)

por

JOSÉ MOLINA DOMINGUEZ

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-58-03

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

1 Área
58 Autor
03 Ordinal de cuaderno (del autor)

Métodos de las SY y de las rotaciones de cálculo de estructuras (III)

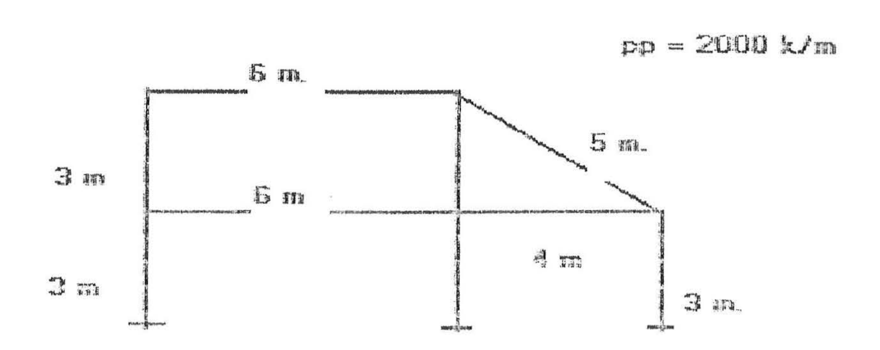
Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid
Gestión y portada: Laura Bejerano Iglesias
CUADERNO 170.01
ISBN: 84-9728-093-8 (obra completa)
ISBN: 84-9728-11-X (vol. III)
Depósito Legal: M-28520-2004

Métodos de las SY y de las rotaciones de cálculo de estructuras (III)
Ejercicios.

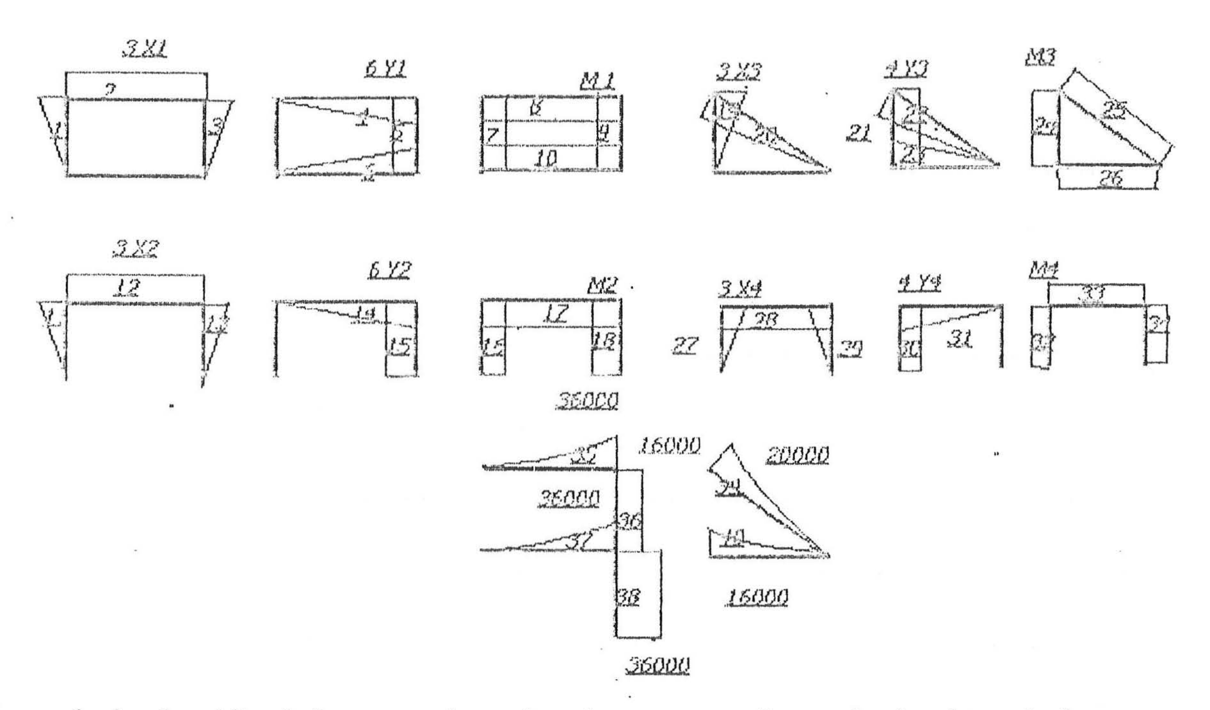
INDICE:

EJERCICIO nº 19

Estudio de la estructura siguiente



Seccionando la estructura en las bases de los pilares que no son centrales se producen cuatro cortes con doce incognitas,cuatro horizontales,cuatro verticales y cuatro de momentos,que junto a los la hipótesis de carga se obtienen los diagramas de momentos



de donde midiendo las areas y las ordenadas correspondientes dan los datos siguientes

Núm.	S		X1	Y1	M1	X2	Y2	M2	X3	Y3	M3	X4	Y4	M4
1	4.5X1	2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	13 X1		3	-3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	4.5X1		2	-6	-1	0	0	0	2	4	-1	0	0	0

4	18 Y1		-3	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	18 Y1		-1.5	6	1	0	0	0	-1.5	-4	1	0	0	0
6	18 Y1		0	4	1	3	-4	-1	0	0	0	0	0	0
7	3 M1		-1.5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	6 M1	-3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	3 M1	-1.5	6	1	0	0	0	-1.5	-4	1	0	0	0	
10	6 M1		0	3	1	3	-3	-1	0	0	0	0	0	0
11	4.5X2	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	0	0	0	
12	18 X2	0	3	1	3	-3	-1	0	0	0	0	0	0	
13	4.5X2	0	0	0	2	-6	-1	0	0	0	2	4	-1	
14	18 Y2	0	-4	-1	-.3	4	1	0	0	0	0	0	0	
15	18 Y2	0	0	0	-1.5	6	1	0	0	0	-1.5	-4	1	
16	3 M2		0	0	0	-1.5	0	1	0	0	0	0	0	0
17	6 M2	0	-3	-1	-3	3	1	0	0	0	0	0	0	
18	3 M2	0	0	0	-1.5	6	1	0	0	0	-1.5	-4	1	
19	4.5X3	2	-6	-1	0	0	0	2	4	-1	0	0	0	
20	7.5X3	0	0	0	0	0	0	2	8/3	-1	0	0	0	
21	12 Y3	1.5	-6	-1	0	0	0	1.5	4	-1	0	0	0	
22	10 Y3	0	0	0	0	0	0	2	8/3	-1	0	0	0	
23	8 Y3	0	0	0	0	0	0	0	8/3	-1	-3	-8/3	1	
24	3 M3	-1.5	6	1	0	0	0	-1.5	-4	1	0	0	0	
25	5 M3	0	0	0	0	0	0	.1.5	-2	1	0	0	0	
26	4 M3	0	0	0	0	0	0	0	-2	1	3	2	-1	
27	4.5X4	0	0	0	2	-6	-1	0	0	0	2	4	-1	
28	12 X4	0	0	0	0	0	0	0	-2	1	3	2	-1	
29	4.5X4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-1	
30	12 Y4	0	0	0	1.5	-6	-1	0	0	0	1.5	4	-1	
31	8 Y4	0	0	0	0	0	0	0	-8/3	1	3	8/3	-1	
32	3 M4	0	0	0	-1.5	6	1	0	0	0	-1.5	-4	1	
33	4 M4	0	0	0	0	0	0	0	2	-1	-3	-2	1	
34	3 M4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.5	0	1	

35	72000		3	-4.5	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	48000	1.5	-6	-1	0	0	0	1.5	4	-1	0	0	0	
37	72000	0	4.5	1	3	-4.5	-1	0	0	0	0	0	0	
38	108000	0	0	0	1.5	-6	-1	0	0	0	1.5	4	-1	
39	33333.3	0	0	0	0	0	0	-2.25	-3	1	0	0	0	
40	21333.3	0	0	0	0	0	0	0	3	-1	-3	-3	1	

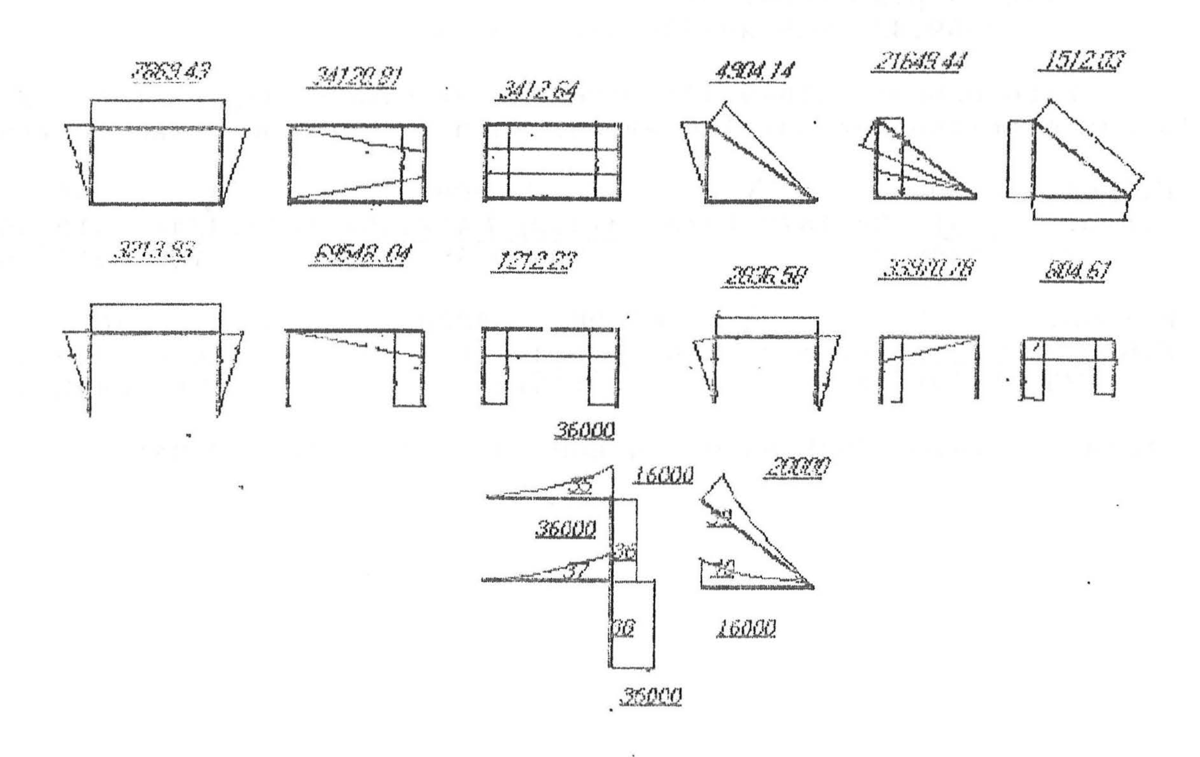
Valores que aplicado el Método de las SY da el sistema de ecuaciones siguiente:

X1	Y1	M1	X2	Y2	M2	X3	Y3	M3	X4	Y4	M4	INDEP.
72	-81	-27	0	0	0	9	18	-4.5	0	0	0	=-288000
-81	252	54	54	-72	-18	-27	-72	18	0	0	0	= 288000
-27	54	18	18	-18	-6	-4.5	-12	3	0	0	0	= 48000
0	54	18	72	-81	-27	0	0	0	9	18	-4.5	=-378000
0	-72	-18	-81	180	36	0	0	0	-27	-72	18	= 972000
0	-18	-6	-27	36	12	0	0	0	-4.5	-12	3	= 180000
9	-27	-4.5	0	0	0	24	38	-12	0	0	0	= 3000
18	-72	-12	0	0	0	38	96	-30	-24	-21.3	8	=-156000
-4.5	18	3	0	0	0	-12	-30	12	12	8	-4	= 36000
0	0	0	9	-27	-4.5	0	-24	12	54	42	-21	= -98000
0	0	0	18	-72	-12	0	-21.3	8	42	69.3	-20	=-368000
0	0	0	-4.5	18	3	0	8	-4	-21	-20	10	= 86666.6

que resuelto da los valores

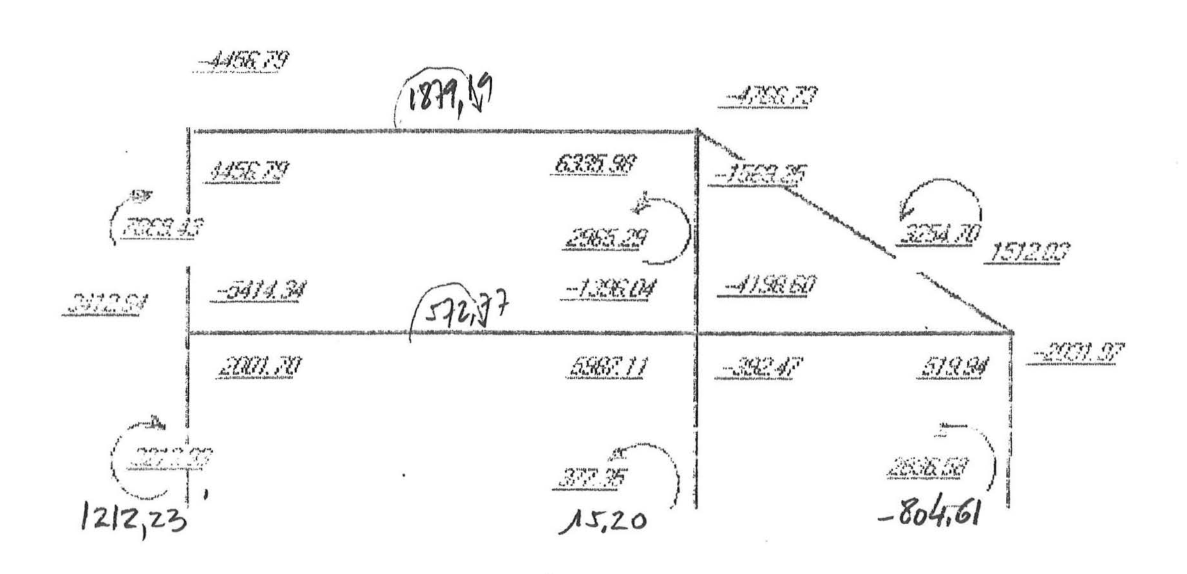
X1= 2623.142 Y1= 5686.802 M1=3412.637 X2= 1071.311 Y2= 11591.34 M2= 1212.228
X3=-1634.713 Y3= 5412.36 M3=1512.027 X4=-945.527 Y4= 8492.696
M4=-804.6141

que llevados a sus respectivos diagramas se convierten en los numéricos



que sumándolos todos dan el diagrama definitivo de esta hipótesis de carga

x



Observemos:

1) El equilibrio del empuje en el piso superior
3213.93-377.35-2836.58=0

2) En el piso superior
7869.43-2965.29-3254.70=1649.44

Este momento (1649.44) produce reacciones hiperestáticas en la parte triangular. Así los empujes son (y reaciones las contrarias)

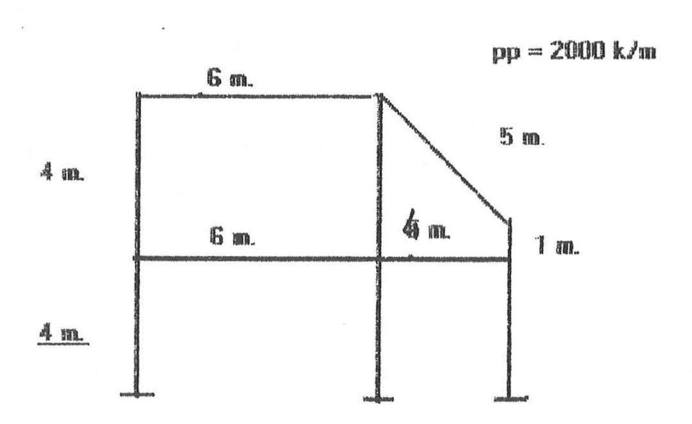
```
E.isos.   6000                   6000    5000                   5000
E.hip.     313.2= 1879,19/6=   313.2    412.35= 1649.4/4=    412.35
   Y1=    5686.8                  10900.85                   Y3= 5412.35

E.isos.   6000                   6000    4000                    4000
E.hip.      95.46= 572.77/6=    95.46   919.99= 3678.66/4=  919.66
   Y3=   11591.34                 11015.12                   Y4= 8492.69
```

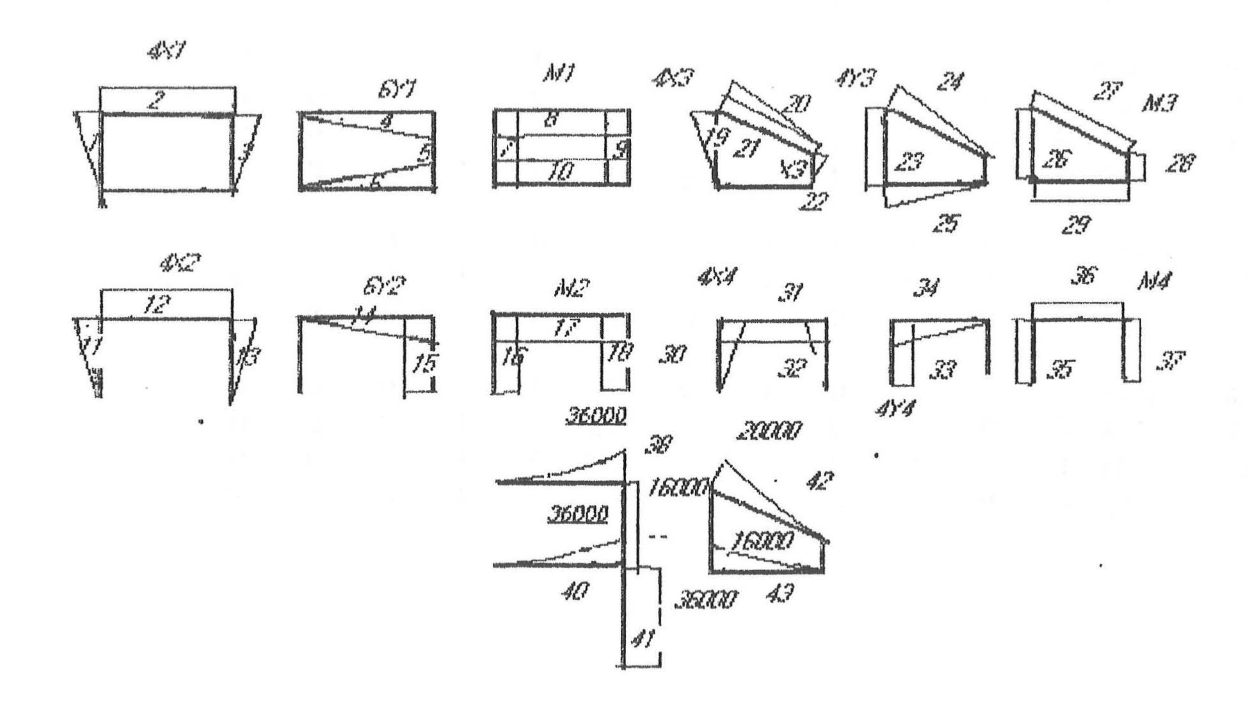
Nota :El valor 3678.66 es la suma de (-4198.60+519.94)

EJERCICIO nº 20

Estudio de la estructura siguiente



Seccionando la estructura en las bases de los pilares que no son centrales se producen cuatro cortes con doce incognitas,cuatro horizontales,cuatro verticales y cuatro de momentos,que junto a los la hipótesis de carga se obtienen los diagramas de momentos



de donde midiendo las areas y las ordenadas correspondientes dan los datos siguientes

Num.	S	X1	Y1	M1	X2	Y2	M2	X3	Y3	M3	X4	Y4	M4
1	8X1	8/3	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	24X1	4	-3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	8X1	8/3	-6	-1	0	0	0	-8/3	-4	-1	0	0	0
4	18Y1	-4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	24Y1	-2	6	1	0	0	0	2	4	1	0	0	0
6	18Y1	0	4	1	4	-4	-1	0	0	0	0	0	0
7	4M1	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	6M1	-4	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	4M1	-2	6	1	0	0	0	2	4	1	0	0	0
10	6M1	0	3	1	4	-3	-1	0	0	0	0	0	0
11	8X2	0	0	0	8/3	0	-1	0	0	0	0	0	0
12	24X2	0	3	1	4	-3	-1	0	0	0	0	0	0
13	8X2	0	0	0	8/3	-6	-1	0	0	0	8/3	4	-1
14	18Y2	0	-4	-1	-4	4	1	0	0	0	0	0	0
15	24Y2	0	0	0	-2	6	1	0	0	0	-2	-4	1
16	4M2	0	0	0	-2	0	1	0	0	0	0	0	0
17	6M2	0	-3	-1	-4	3	1	0	0	0	0	0	0
18	4M2	0	0	0	-2	6	1	0	0	0	-2	-4	1
19	8X3	-8/3	6	1	0	0	0	8/3	4	1	0	0	0
20	7.5X3	0	0	0	0	0	0	3	8/3	1	0	0	0
21	5X3	0	0	0	0	0	0	2.5	2	1	0	0	0
22	0.5X3	0	0	0	0	0	0	3	8/3	1	0	0	0
23	16Y3	-2	6	1	0	0	0	2	4	1	0	0	0
24	10Y3	0	0	0	0	0	0	3	8/3	1	0	0	0
25	8 Y3	0	0	0	0	0	0	0	8/3	1	4	8/3	-1
26	4M3	-2	6	1	0	0	0	2	4	1	0	0	0
27	5M3	0	0	0	0	0	0	2.5	2	1	0	0	0
28	M3	0	0	0	0	0	0	0.5	0	1	0	0	0
29	4M3	0	0	0	0	0	0	0	2	1	4	2	-1

30	8X4	0	0	0	8/3	-6	-1	0	0	0	8/3	4	-1
31	16X4	0	0	0	0	0	0	0	2	1	4	2	-1
32	8X4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8/3	0	-1
33	16Y4	0	0	0	2	-6	-1	0	0	0	2	4	-1
34	8Y4	0	0	0	0	0	0	0	8/3	1	4	8/3	-1
35	4M4	0	0	0	-2	6	1	0	0	0	-2	-4	1
36	4M4	0	0	0	0	0	0	0	-2	-1	-4	-2	1
37	4M4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	1
38	72000	4	-4.5	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
39	64000	2	-6	-1	0	0	0	-2	-4	-1	0	0	0
40	72000	0	4.5	1	4	-4.5	-1	0	0	0	0	0	0
41	144000	0	0	0	2	-6	-1	0	0	0	2	4	-1
42	100000/3	0	0	0	0	0	0	3.25	3	1	0	0	0
43	64000/3	0	0	0	0	0	0	0	-3	-1	-4	-3	1

Valores que aplicando el Método de las SY da el sistema de ecuaciones siguiente:

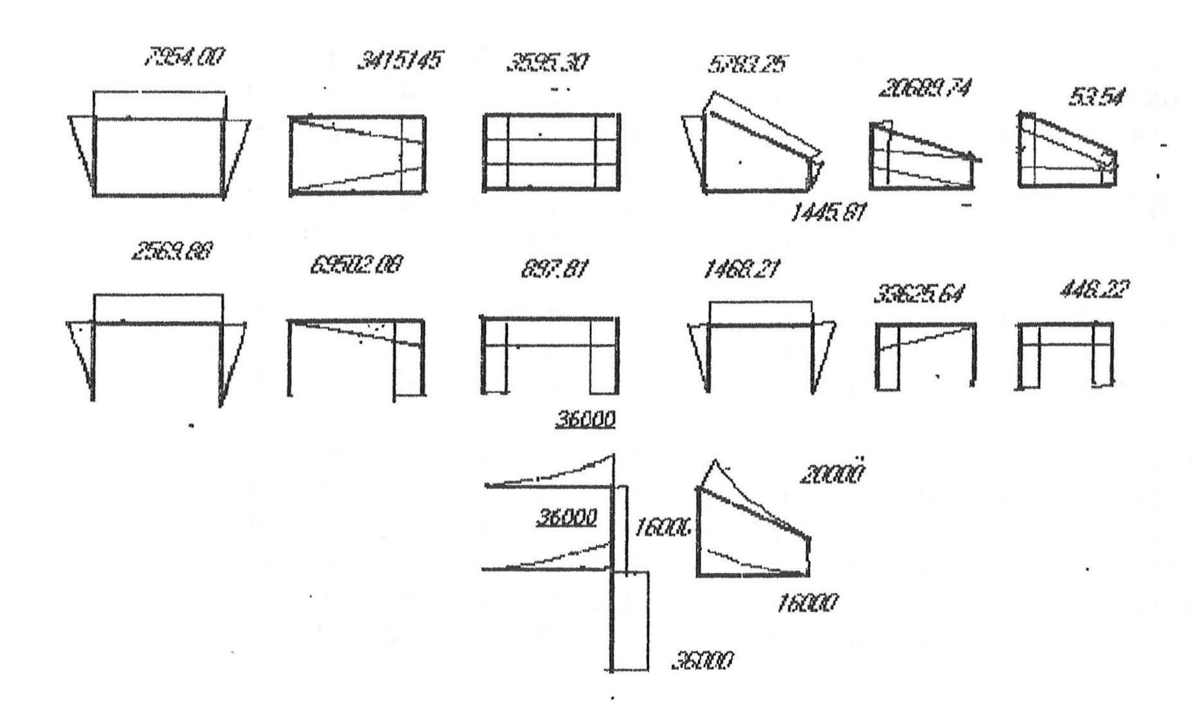
X1	Y1	M1	X2	Y2	M2	X3	Y3	M3	X4	Y4	M4	IND
138.6	-120	-40	0	0	0	-21.3	-32	-8	0	0	0	-416000
-120	288	60	72	-72	-18	48	96	24	0	0	0	384000
-40	60	20	24	-18	-6	8	16	4	0	0	0	64000
0	72	24	138.6	-120	-40	0	0	0	21.3	32	-8	-576000
0	-72	-18	-120	216	42	0	0	0	-48	-96	24	1188000
0	-18	-6	-40	42	14	0	0	0	-8	-16	4	216000
-21.3	48	8	0	0	0	56.6	62	21	0	0	0	19666.6
-32	96	16	0	0	0	62	112	34	32	21.3	-8	220000
-8	24	4	0	0	0	21	34	14	16	8	-4	52000
0	0	0	21.3	-48	-8	0	32	16	106.6	64	-32	-202666.6
0	0	0	32	-96	-16	0	21.3	8	64	85.3	-24	-512000
0	0	0	-8	24	4	0	-8	-4	-32	-24	12	122666.6

que resuelto da

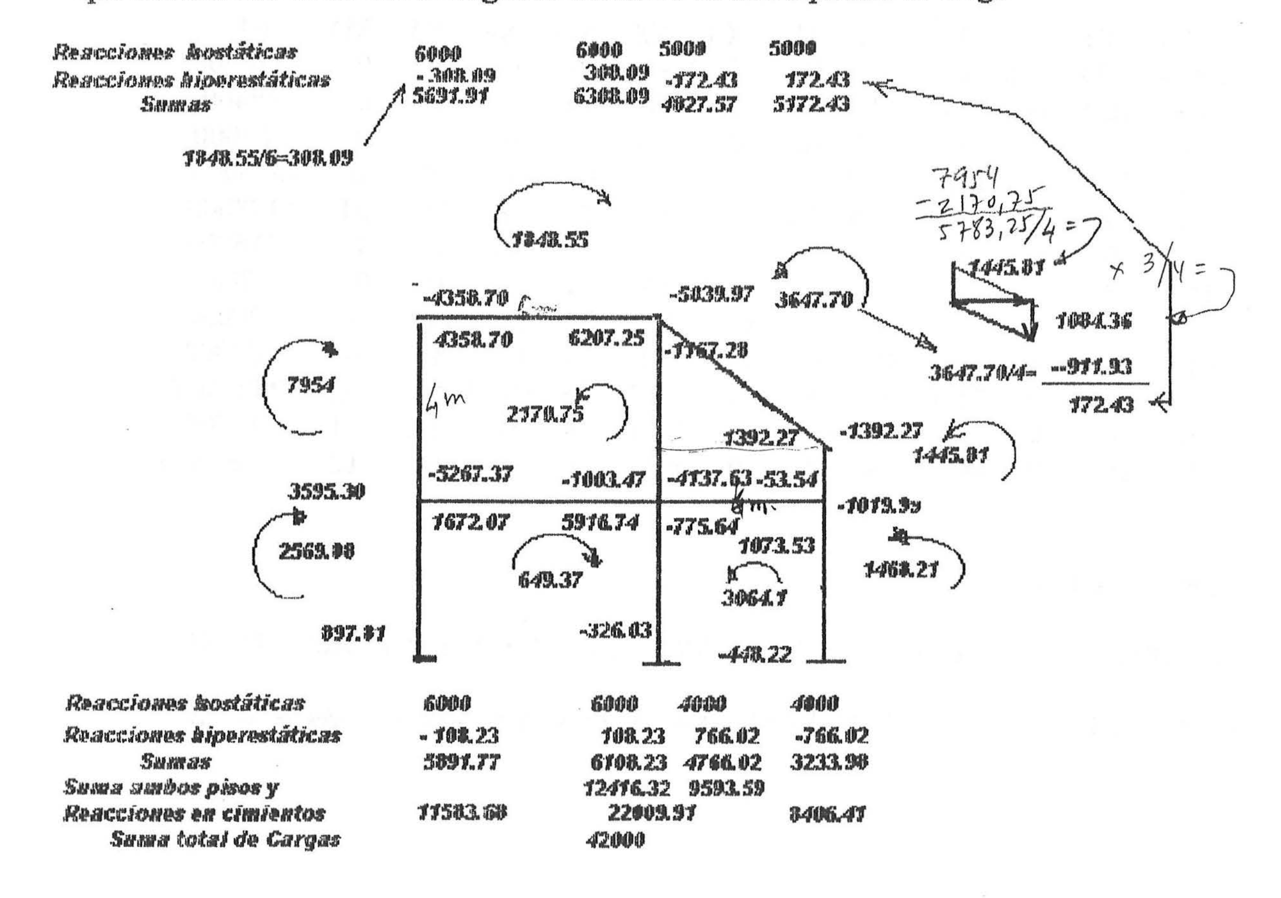
X1=1988.50 Y1=5691.91 M1=3595.30 X2=642.47 Y2=11583.68 M2= 897.81

X3=1445.81 Y3=-5172.44 M3=-53.54 X4=-367.05 Y4=8406.41 M4=-448.22

que llevados a sus respectivos diagramas se convierten en los numéricos

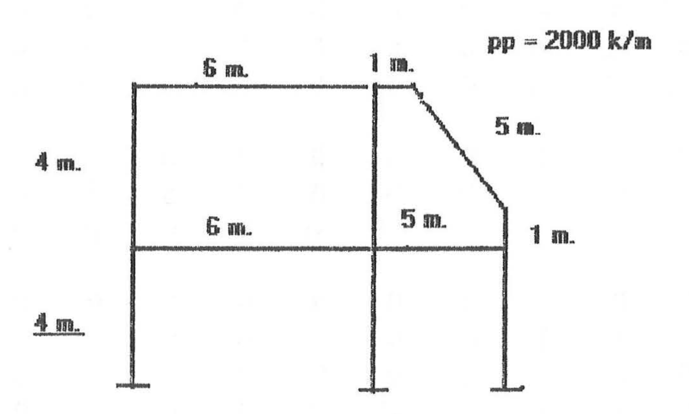


que sumándolos todos dan el diagrama definitivo de esta hipótesis de carga

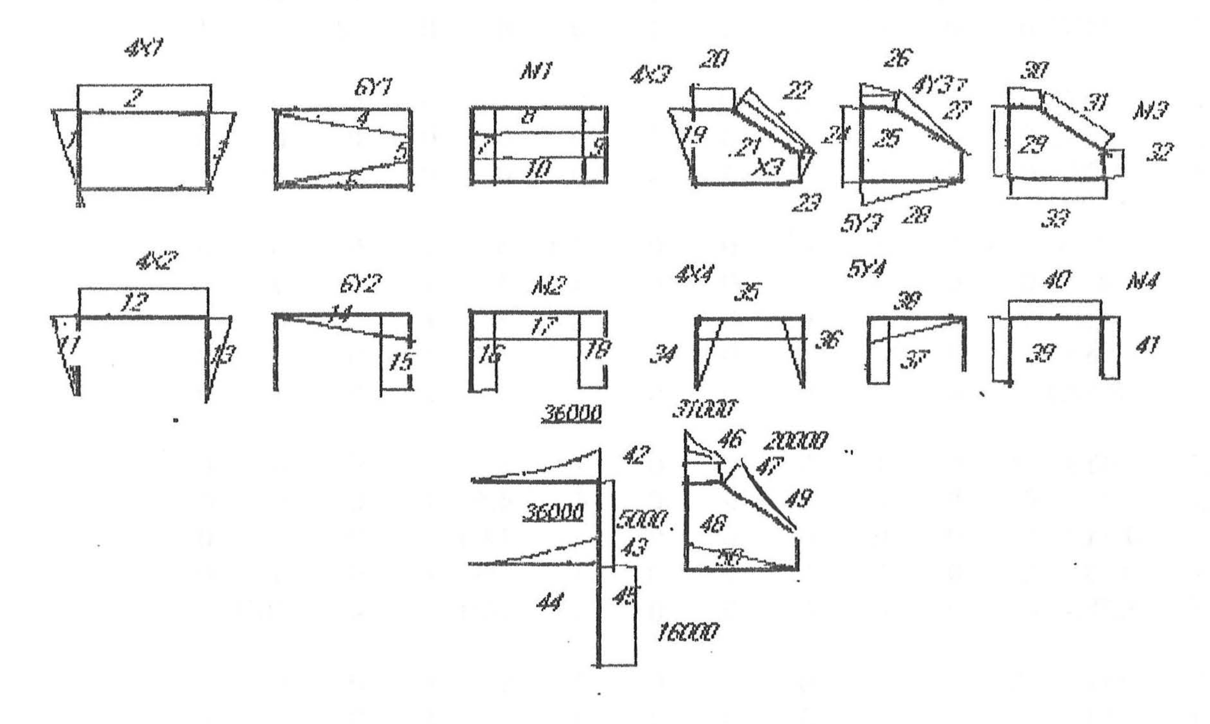


EJERCICIO Nº 21

Estudio de la estructura siguiente



Seccionando la estructura en las bases de los pilares que no son centrales se producen cuatro cortes con doce incognitas,cuatro horizontales,cuatro verticales y cuatro de momentos,que junto a los la hipótesis de carga se obtienen los diagramas de momentos



de donde midiendo las areas y las ordenadas correspondientes dan los datos siguientes

Num.	S	X1	Y1	M1	X2	Y2	M2	X3	Y3	M3	X4	Y4	M4
1	8X1	8/3	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	24X1	4	-3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	8X1	8/3	-6	-1	0	0	0	-8/3	-5	-1	0	0	0
4	18Y1	-4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	24Y1	-2	6	1	0	0	0	2	5	1	0	0	0
6	18Y1	0	4	1	4	-4	-1	0	0	0	0	0	0
7	4M1	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	6M1	-4	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	4M1	-2	6	1	0	0	0	2	5	1	0	0	0
10	6M1	0	3	1	4	-3	-1	0	0	0	0	0	0
11	8X2	0	0	0	8/3	0	-1	0	0	0	0	0	0
12	24X2	0	3	1	4	-3	-1	0	0	0	0	0	0
13	8X2	0	0	0	8/3	-6	-1	0	0	0	8/3	5	-1
14	18Y2	0	-4	-1	-4	4	1	0	0	0	0	0	0
15	24Y2	0	0	0	-2	6	1	0	0	0	-2	-5	1
16	4M2	0	0	0	-2	0	1	0	0	0	0	0	0
17	6M2	0	-3	-1	-4	3	1	0	0	0	0	0	0
18	4M2	0	0	0	-2	6	1	0	0	0	-2	-5	1
19	8X3	-8/3	6	1	0	0	0	8/3	5	1	0	0	0
20	4X3	0	0	0	0	0	0	4	4.5	1	0	0	0
21	5X3	0	0	0	0	0	0	2.5	2	1	0	0	0
22	7.5X3	0	0	0	0	0	0	3	8/3	1	0	0	0
23	0.5X3	0	0	0	0	0	0	2/3	0	1	0	0	0
24	20Y3	-2	6	1	0	0	0	2	5	1	0	0	0
25	4Y3	0	0	0	0	0	0	4	4.5	1	0	0	0
26	0.5Y3	0	0	0	0	0	0	4	14/3	1	0	0	0
27	10Y3	0	0	0	0	0	0	3	8/3	1	0	0	0
28	2.5Y3	0	0	0	0	0	0	0	10/3	1	4	10/3	-1
29	4M3	-2	6	1	0	0	0	2	5	1	0	0	0
30	M3	0	0	0	0	0	0	4	4.5	1	0	0	0
31	5M3	0	0	0	0	0	0	2.5	2	1	0	0	0
32	M3	0	0	0	0	0	0	0.5	0	1	0	0	0
33	5M3	0	0	0	0	0	0	0	2.5	1	4	2.5	-1

34	8X4	0	0	0	8/3	-6	-1	0	0	0	8/3	5	-1
35	20X4	0	0	0	0	0	0	0	2.5	1	4	2.5	-1
36	8X4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8/3	0	-1
37	20Y4	0	0	0	2	-6	-1	0	0	0	2	5	-1
38	12.5Y4	0	0	0	0	0	0	0	10/3	1	4	10/3	-1
39	4M4	0	0	0	-2	6	1	0	0	0	-2	-5	1
40	5M4	0	0	0	0	0	0	0	-2.5	-1	-4	-2.5	1
41	4M1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	1
42	72000	4	-4.5	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
43	20000	2	-6	-1	0	0	0	-2	-5	-1	0	0	0
44	72000	0	4.5	1	4	-4.5	-1	0	0	0	0	0	0
45	64000	0	0	0	2	-6	-1	0	0	0	2	5	-1
46	1000/3	0	0	0	0	0	0	4	19/4	1	0	0	0
47	5000	0	0	0	0	0	0	4	14/3	1	0	0	0
48	20000	0	0	0	0	0	0	4	4.5	1	0	0	0
49	100000/3	0	0	0	0	0	0	3.25	3	1	0	0	0
50	125000/3	0	0	0	0	0	0	0	-3.75	-1	-4	-3.75	1

Valores que aplicando el Método de las SY da el sistema de ecuaciones siguiente:

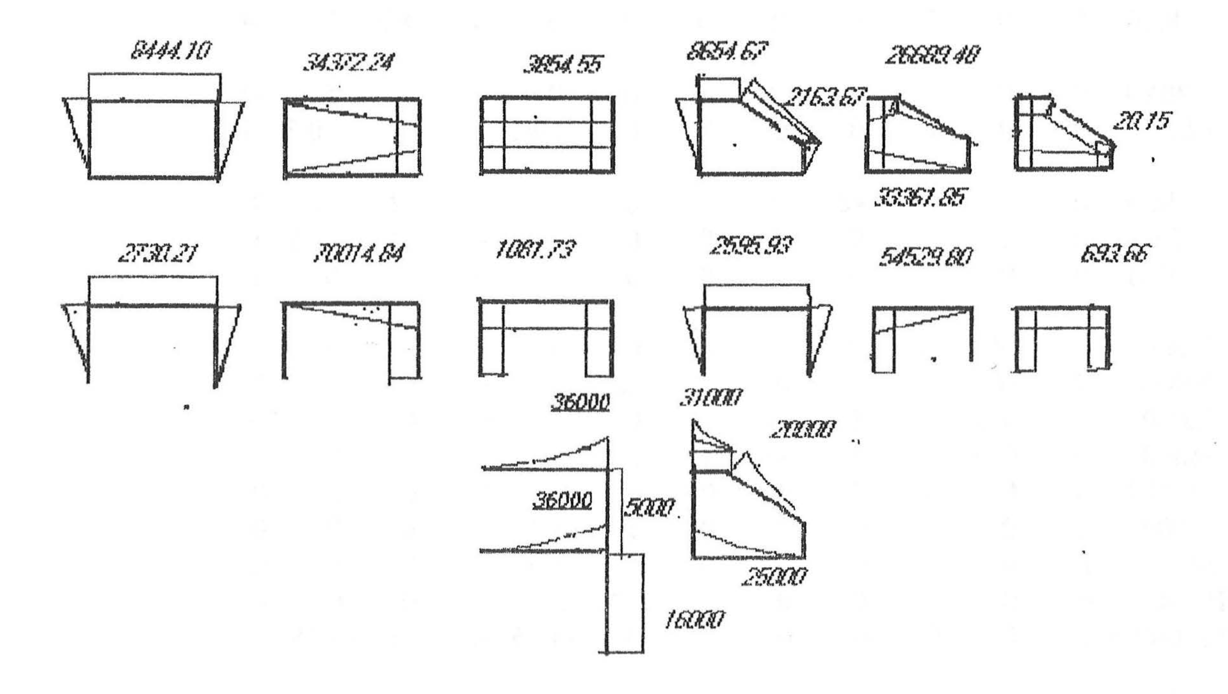
X1	Y1	M1	X2	Y2	M2	X3	Y3	M3	X4	Y4	M4		IND
138.6	-120	-40	0	0	0	-21.3	-40	-8	0	0	0	=	-32800
-120	288	60	72	-72	-18	48	120	24	0	0	0	=	120000
-40	60	20	24	-18	-6	8	20	4	0	0	0	=	20000
0	72	24	138.6	-120	-40	0	0	0	21.3	40	-8	=	-416000
0	-72	-18	-120	216	42	0	0	0	-48	-120	24	=	708000
0	-18	-6	-40	42	14	0	0	0	-8	-20	4	=	136000
-21.3	48	8	0	0	0	72.6	88	25	0	0	0	=	-169666.6
-40	120	20	0	0	0	88	188.6	47	50	41.6	-12.5	=	41333.3
-8	24	4	0	0	0	25	47	16	20	12.5	-5	=	3000
0	0	0	21.3	-48	-8	0	50	20	122.6	90	-36	=	38666.6
0	0	0	40	120	-20	0	41.6	12.5	90	141.6	-32.5	=	-163750
0	0	0	-8	24	4	0	-12.5	-5	-36	-32.5	13	=	22333.3

que resuelto da

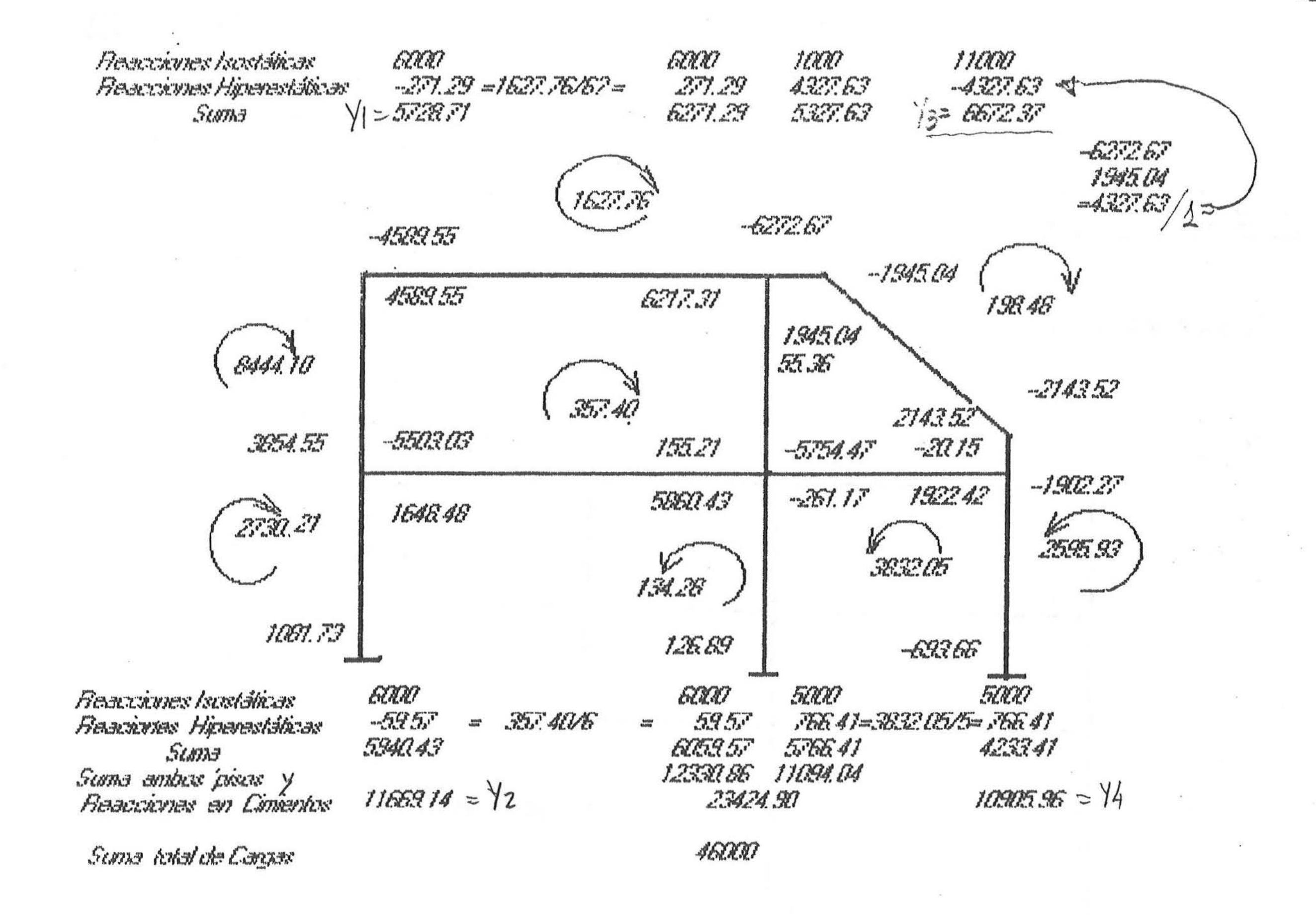
X1=2111.02 / Y1=5728.71 / M1=3854.55 / X2=682.55 / Y2=11669.14 / M2= 1081.73

X3=2163.67 / Y3=-6672.37 / M3=-20.15 / X4=-648.98 / Y4=10905.96 / M4=-693-66

que llevados a sus respectivos diagramas se convierten en los numéricos



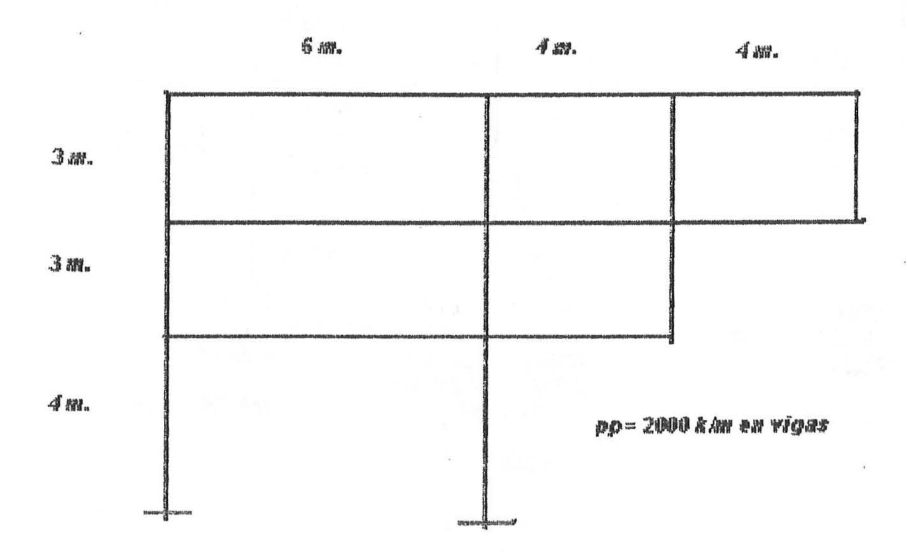
que sumándolos todos dan el diagrama definitivo de esta hipótesis de carga



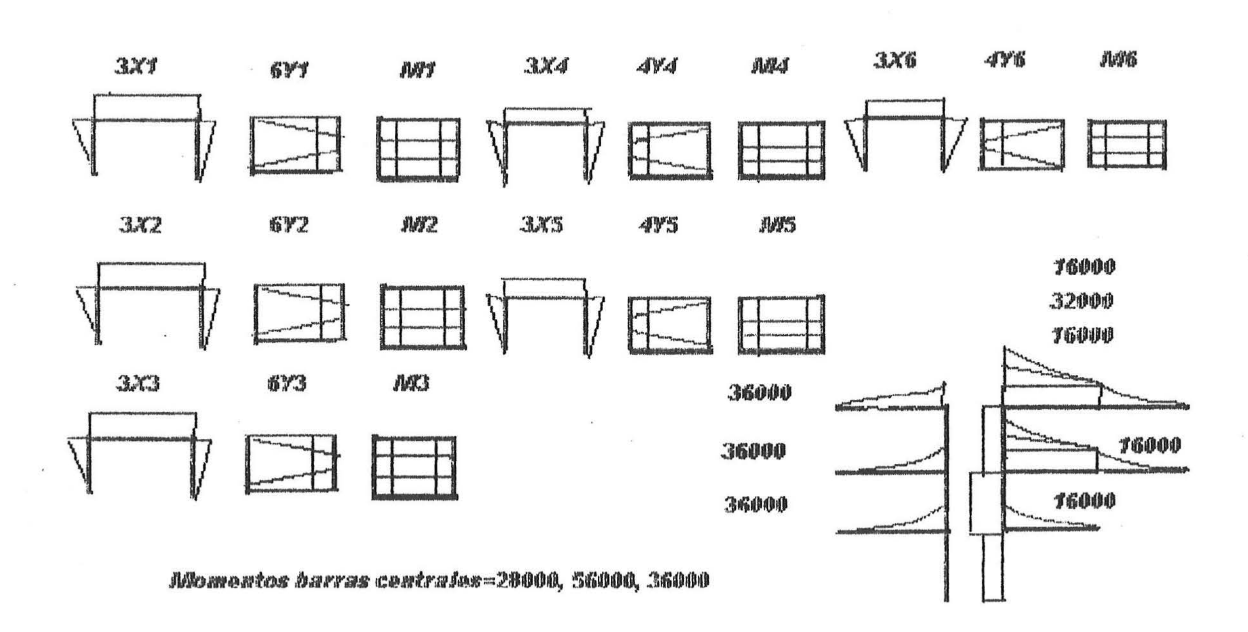
Observese que la barra inclinada se comporta para los efectos de las reacciones isostáticas,como si fuera un pilar,todo su peso se acumula en su extremo derecho y las reacciones hiperestáticas son producidas sólo por la barra horizontal.Su comprobación lo da el Método de las SY con el valor de Y3.

EJERCICIO nº 22

Estudio de la estructura siguiente



Seccionando la estructura en las bases de los pilares que no son centrales se producen seis cortes con dieciocho incognitas,cuatro horizontales,cuatro verticales y cuatro de momentos, que junto a los la hipótesis de carga se obtienen los diagramas de momentos



de donde midiendo las areas y las ordenadas correspondientes dan los datos siguientes

Num.	S	X1	Y1	M1	X2	Y2	M2	X3	Y3	M3	X4	Y4	M4	X5	Y5	M5	X6	Y6	M6	
1	4.5X1	2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	18X1	3	-3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	4.5X1	2	-6	-1	0	0	0	0	0	0	-2	4	1	0	0	0	0	0	0	
4	18Y1	-3	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5	18Y1	-1.5	6	1	0	0	0	0	0	0	1.5	-4	-1	0	0	0	0	0	0	
6	18Y1	0	4	1	3	-4	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7	3M1	-1.5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
8	6M1	-3	3		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	3M1	-1.5	6	1	0	0	0	0	0	0	1.5	-4	-1	0	0	0	0	0	0	
10	6M1	0	3	1	3	-3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	4.5X2	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
12	18X2	0	3	1	3	-3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
13	4.5X2	0	0	0	2	-6	-1	0	0	0	0	0	0	-2	4	1	0	0	0	
14	18 Y2	0	-4	-1	-3	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15	18 Y2		0	0	0	-1.5	6	1	0	0	0	0	0	0	1.5	-4	-1	0	0	0
16	18 Y2	0	0	0	0	4	1	4	-4	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
17	3M2	0	0	0	-1.5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
18	6M2		0	-3	-1	-3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	3M2	0	0	0	-1.5	6	1	0	0	0	0	0	0	1.5	-4	-1	0	0	0	
20	6M2	0	0	0	0	3	1	4	-3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
21	8X3	0	0	0	0	0	0	8/3	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
22	24X3	0	0	0	0	3	1	4	-3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
23	8X3	0	0	0	0	0	0	8/3	-6	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
24	18Y3	0	0	0	0	-4	-1	-4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
25	24Y3	0	0	0	0	0	0	-2	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
26	4M3	0	0	0	0	0	0	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
27	6M3	0	0	0	0	-3	-1	-4	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
28	4M3	0	0	0	0	0	0	-2	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
29	4.5X4	-2	6	1	0	0	0	0	0	0	2	-4	-1	0	0	0	0	0	0	
30	12X4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-2	-1	0	0	0	0	0	0	
31	4.5X4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	-2	4	1	
32	12Y4	1.5	-6	-1	0	0	0	0	0	0	-1.5	4	1	0	0	0	0	0	0	
33	8Y4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	8/3	1	0	0	0	0	0	0	
34	8Y4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8/3	1	3	-8/3	-1	0	0	0	

35	3M4	1.5	-6	-1	0	0	0	0	0	0	-1.5	4	1	0	0	0	0	0	0
36	4M4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	2	1	0	0	0	0	0	0
37	3M4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.5	0	1	0	0	0	1.5	-4	-1
38	4M4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	3	-2	-1	0	0	0
39	4.5X5	0	0	0	-2	6	1	0	0	0	0	0	0	2	-4	-1	0	0	0
40	12X5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	3	-2	-1	0	0	0
41	4.5X5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0
42	12Y5	0	0	0	1.5	-6	-1	0	0	0	0	0	0	-1.5	4	1	0	0	0
43	8Y5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8/3	-1	-3	8/3	1	0	0	0
44	8Y5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8/3	1	0	0	0
45	3M5	0	0	0	1.5	-6	-1	0	0	0	0	0	0	-1.5	4	1	0	0	0
46	4M5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-1	-3	2	1	0	0	0
47	3M5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.5	0	1	0	0	0
48	4M5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0
49	4.5X6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	1	0	0	0	2	-4	-1
50	12X6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-2	-1
51	4.5X6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-1
52	12Y6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.5	0	-1	0	0	0	-1.5	4	1
53	8Y6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	8/3	1
54	8Y6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8/3	1
55	3M6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.5	0	-1	0	0	0	-1.5	4	1
56	4M6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	2	1
57	3M6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.5	0	1
58	4M6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
59	72000	3	-4.5	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
60	84000	-1.5	6	1	0	0	0	0	0	0	1.5	-4	-1	0	0	0	0	0	0
61	72000	0	4.5	1	3	-4.5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
62	168000	0	0	0	-1.5	6	1	0	0	0	0	0	0	1.5	-4	-1	0	0	0
63	72000	0	0	0	0	4.5	1	4	-4.5	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
64	144000	0	0	0	0	0	0	-8/3	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
65	64000/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	-1	0	0	0	0	0	0
66	64000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-8/3	-1	0	0	0	0	0	0
67	64000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-2	-1	0	0	0	0	0	0
68	64000/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	3	-3	-1	0	0	0

69	64000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8/3	1	3	-8/3	-1	0	0	0
70	64000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	3	-2	-1	0	0	0
71	64000/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	-1	0	0	0
72	64000/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	-1
73	64000/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1

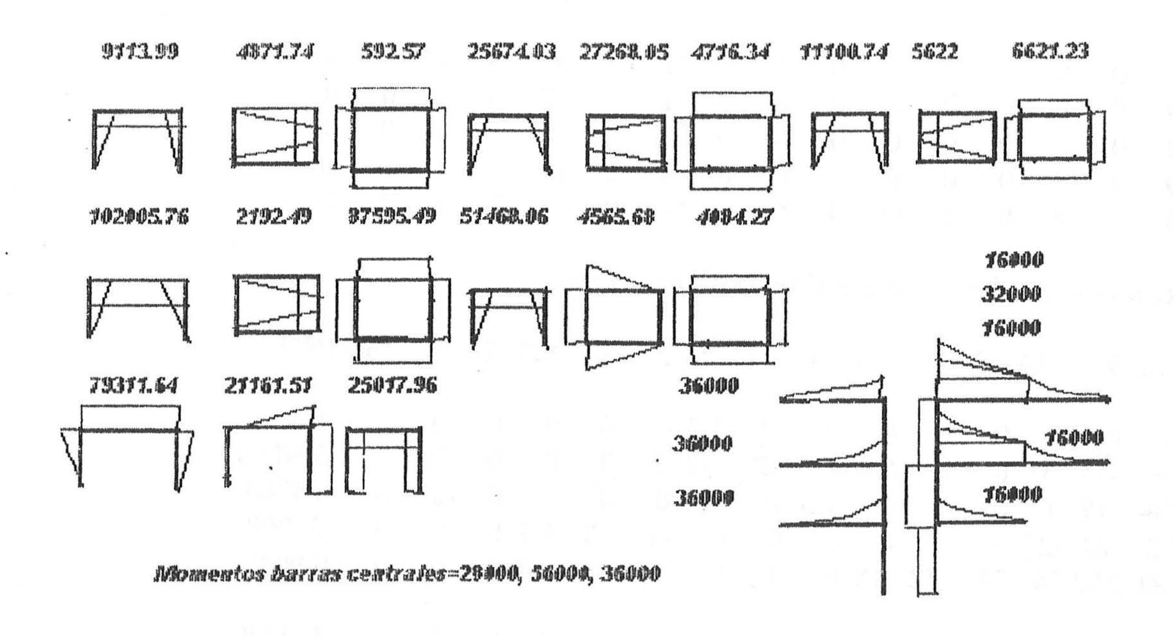
Y aplicando el Método de las SY sale el sistema de ecuaciones

X1	Y1	M1	X2	Y2	M2	X3	Y3	M3	X4	Y4	M4	X5	Y5	M5	X6	Y6	M6	IND
72	-81	-27	0	0	0	0	0	0	-9	18	4.5	0	0	0	0	0	0	-90000
-81	252	54	54	-72	-18	0	0	0	27	-72	-18	0	0	0	0	0	0	-504000
-27	54	18	18	-18	-6	0	0	0	4.5	-12	-3	0	0	0	0	0	0	-84000
0	54	18	72	-81	-27	0	0	0	0	0	0	-9	18	4.5	0	0	0	36000
0	-72	-18	-81	252	54	72	-72	-18	0	0	0	27	-72	-18	0	0	0	-1008000
0	-18	-6	-27	54	18	24	-18	-6	0	0	0	4.5	-12	-3	0	0	0	-312000
0	0	0	0	72	24	138.6	-120	-40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	96000
0	0	0	0	-72	-18	-120	216	42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-540000
0	0	0	0	-18	-6	-40	42	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-72000
-9	27	4.5	0	0	0	0	0	0	54	-42	-21	0	0	0	-9	18	4.5	-574000
18	-72	-12	0	0	0	0	0	0	-42	90.6	28	24	-21.3	-8	0	0	0	336000
4.5	-18	-3	0	0	0	0	0	0	-21	28	14	12	-8	-4	4.5	-12	-3	84000
0	0	0	-9	27	4.5	0	0	0	0	24	12	54	-42	-21	0	0	0	-764000
0	0	0	18	-72	-12	0	0	0	0	-21.3	-8	-42	90.6	28	0	0	0	1098666.6
0	0	0	4.5	-18	-3	0	0	0	0	-8	-4	-21	28	14	0	0	0	338666.6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-9	0	4.5	0	0	0	54	-42	-21	-64000
0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	-12	0	0	0	-42	90.6	28	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.5	0	-3	0	0	0	-21	28	14	0

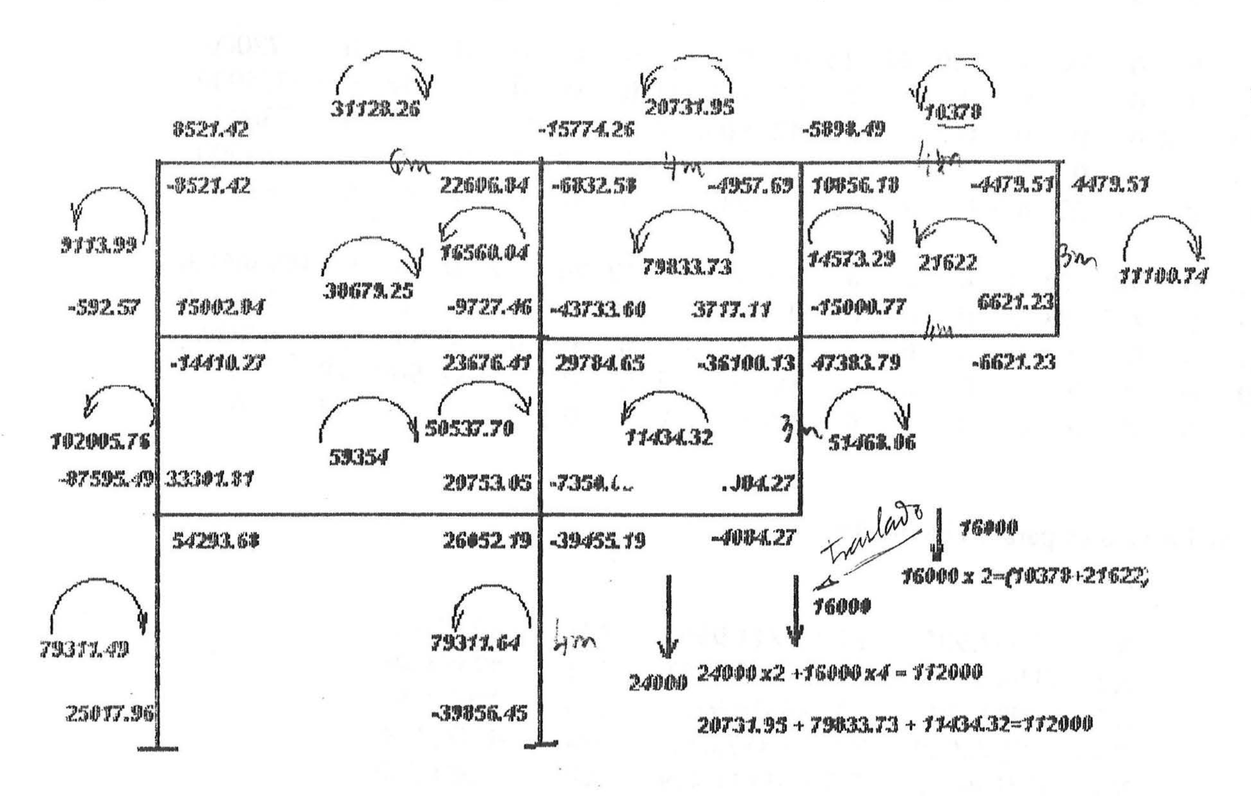
Que resuelto da los valores para las incognitas

X1 = -3037.995	Y1 = 811.9566	M1 = -592.5665
X2 = -34001.92	Y2 = 365.4151	M2 = -87595.49
X3 = 19827.91	Y3 =-3526.918	M3 = 25017.96
X4 = -8558.009	Y4 = 6817.013	M4 = -4716.338
X5 = -17156.02	Y5 = -1141.419	M5 = -4084.266
X6 = -3700.245	Y6= 1405.501	M6 = -6621.225

que llevados a sus respectivos diagramas se convierten en los numéricos



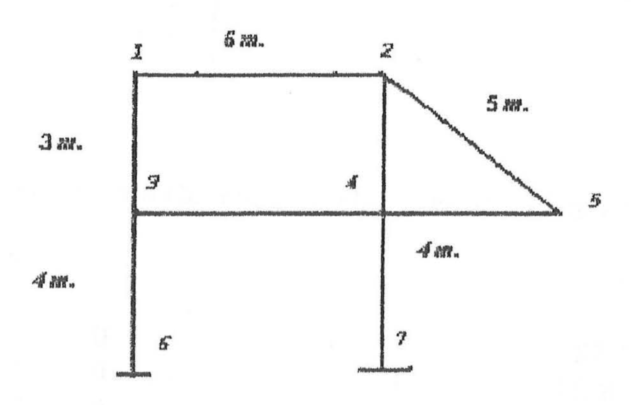
que sumándolos todos dan el diagrama definitivo de esta hipótesis de carga



Observese el equilibrio de los momentos de vuelco con la suma de los momentos hiperestáticos.

EJERCICIO nº 23

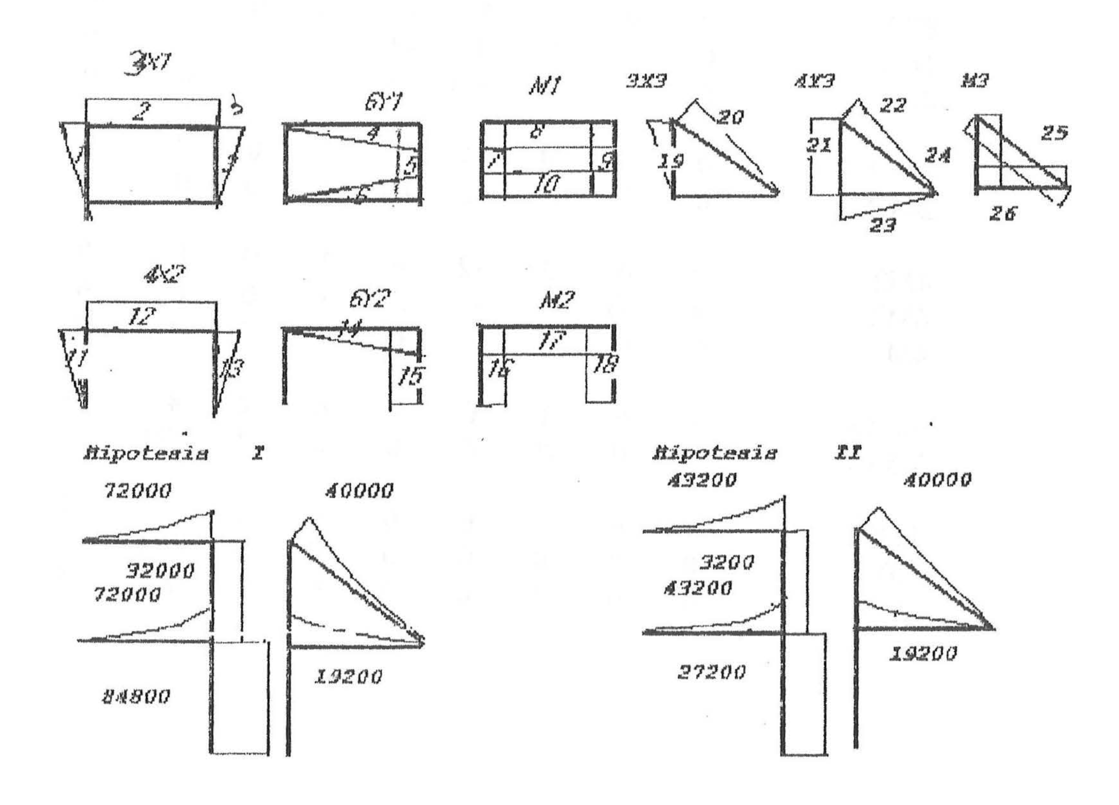
Estudio de la estructura siguiente

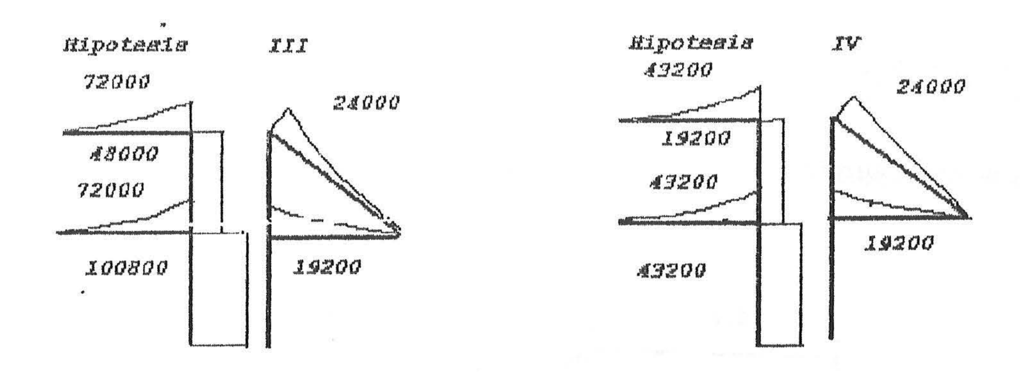


Se suponen cargas propias de 2400 k/m. y sobrecarga de 1600 k/m. en los cuatro casos siguientes:

1- Cargas totales en vanos 1-2,3-4, y 2-5.
2- Carga total en vano 2-5
3- Carga total en vanos 1-2, y 3-4.
4- Carga propia en todos los vanos.

Para encontrar la matriz del sistema de la Estructura damos cortes para convertir la estructura en isostática,en la base de las barras 1-3,3-6 y en nudo 5,resultando los diagramas





de donde midiendo las areas y las ordenadas correspondientes dan los datos siguientes

Núm	S	X1	Y1	M1	X2	Y2	M2	X3	Y3	M3
1	4.5X1	2	0	-1	0	0	0	0	0	0
2	18 X1	3	-3	-1	0	0	0	0	0	0
3	4.5X1	2	-6	-1	0	0	0	-2	-4	1
4	18Y1	-3	4	1	0	0	0	0	0	0
5	18Y1	-1.5	6	1	0	0	0	-1.5	4	-1
6	18Y1	0	4	1	4	-4	-1	0	0	0
7	3M1	-1.5	0	1	0	0	0	0	0	0
8	6M1	-3	3	1	0	0	0	0	0	0
9	3M1	-1.5	6	1	0	0	0	1.5	4	-1
10	6M1	0	3	1	4	-3	-1	0	0	0
11	8X2	0	0	0	8/3	0	-1	0	0	0
12	24X2	0	3	1	4	-3	-1	0	0	0
13	8X2	0	0	0	8/3	-6	-1	0	0	0
14	18Y2	0	-4	-1	-4	4	1	0	0	0
15	24Y2	0	0	0	-2	6	1	0	0	0
16	4M2	0	0	0	-2	0	1	0	0	0
17	6M2	0	-3	-1	-4	3	1	0	0	0
18	4M2	0	0	0	-2	6	1	0	0	0
19	4,5X3	-2	6	1	0	0	0	2	4	-1
20	7.5X3	0	0	0	0	0	0	2	8/3	-1
21	12Y3	-1.5	6	1	0	0	0	1.5	4	-1
22	10Y3	0	0	0	0	0	0	2	8/3	-1
23	8Y3	0	0	0	0	0	0	0	8/3	-1

24	3M3	1.5	-6	-1	0	0	0	-1.5	-4	1
25	5M3	0	0	0	0	0	0	-1.5	-2	1
26	4M3	0	0	0	0	0	0	0	-2	1

Hipótesis de cargas

	I	II	III	IV									
27	144000	86400	144000	86400	3	-4.5	-1	0	0	0	0	0	0
28	66666.6	66666.6	40000	40000	0	0	0	0	0	0	2.25	3	-1
29	96000	9600	144000	57600	1.5	-6	-1	0	0	0	-1.5	-4	1
30	144000	86400	144000	86400	0	4.5	1	4	-4.5	-1	0	0	0
31	25600	25600	25600	25600	0	0	0	0	0	0	0	-3	1
32	339200	108800	403200	172800	0	0	0	2	-6	-1	0	0	0

Que operando con el Método da el sistema con los cuatro vectores independientes de las hipótesis

X1	Y1	M1	X2	Y2	M2	X3	Y3	M3	H-I	H-II	H-III	H-IV
72	-81	-27	0	0	0	-9	-18	4.5	-576000	-273600	-648000	-345600
-81	252	54	72	-72	-18	27	72	-18	576000	57600	864000	345600
-27	54	18	24	-18	-6	4.5	12	-3	96000	9600.	144000	57600
0	72	24	138.6	-120	-40	0	0	0	-1254400	-563200	-1382400	-69120
0	-72	-18	-120	216	42	0	0	0	2683200	1041600	3067200	142560
0	-18	-6	-40	42	14	0	0	0	483200	195200	547200	259200
-9	27	4.5	0	0	0	24	38	-12	-6000	-135600	126000	-3600
-18	72	12	0	0	0	38	96	-30	260800	-84800	532800	187200
4.5	-18	-3	0	0	0	-12	-30	12	-54933.3	31466.6	-129600	-43200

Que resueltos los cuatro sistemas dan los valores

	H-I	H-II	H-III	H-IV
X1=	-2915.683	-5370.969	422.8445	-2878.1285
Y1=	7218.641	2444.076	8551.2620	3776.6958
M1=	-5468.258	-8800.877	-1696.7128	-5029.3934
X2=	622 .215	188.055	687.0928	252.9298
Y2=	15150.400	5555.483	17550.2524	7955.3392
M2=	-2221.575	-2815.714	-1334.6334	-1928.7776
X3=	-11782.57	-12387.61	-8190.8333	-8795.8813
Y3=	1321.438	1444.163	2296.3768	2419.1032
M3=	-2502.472	-2674.976	-688.6271	-861.1298

Sustituyendo estos valores en sus respectivos diagramas de las hipótesis de cargas resultan

CASO HIPOTESIS I

8741.04 43311.85 5469.26 35347.71 5281.75 2502.47

2488.86 90902.40 2221.58

que al sumarlos con los diagramas de sus cargas dan

3278.78 -12436.51
-3278.78 25409.37 -12972.86
8747.04 26600.67
-5468.26 757.82 -13627.81 -11415.78 2502.47
4710.44 23651.63 1391.96 -2502.47
2488.86 2488.86
-2221.58 -3880.82
2m. 29600 k.

Momentos

8747.04
26600.67
12436.51
11415.78

59200.00 mk.

Peso Voladizos

5 x 4000= 20000
4 x 2400= 9600
29600

Momento Voladizo=29600x2=59200 mk

CASO HIPOTESIS II

16112.91 14664.46 8800.88 37162.83 5776.65 2674.97

752.22 33331.10 2815.71

que al sumarlos con los diagramas de sus cargas dan

7312.03 -11288.79
-7312.03 21223.51 -9934.72
16112.91 21049.92
-8800.88 5232.95 -11115.2 -10748.38 2674.97
.3567.93 19300.41 2563.17 -2674.97
752.22 752.22
-2815.71 -3315.39
2m. 29600 k.

Momentos

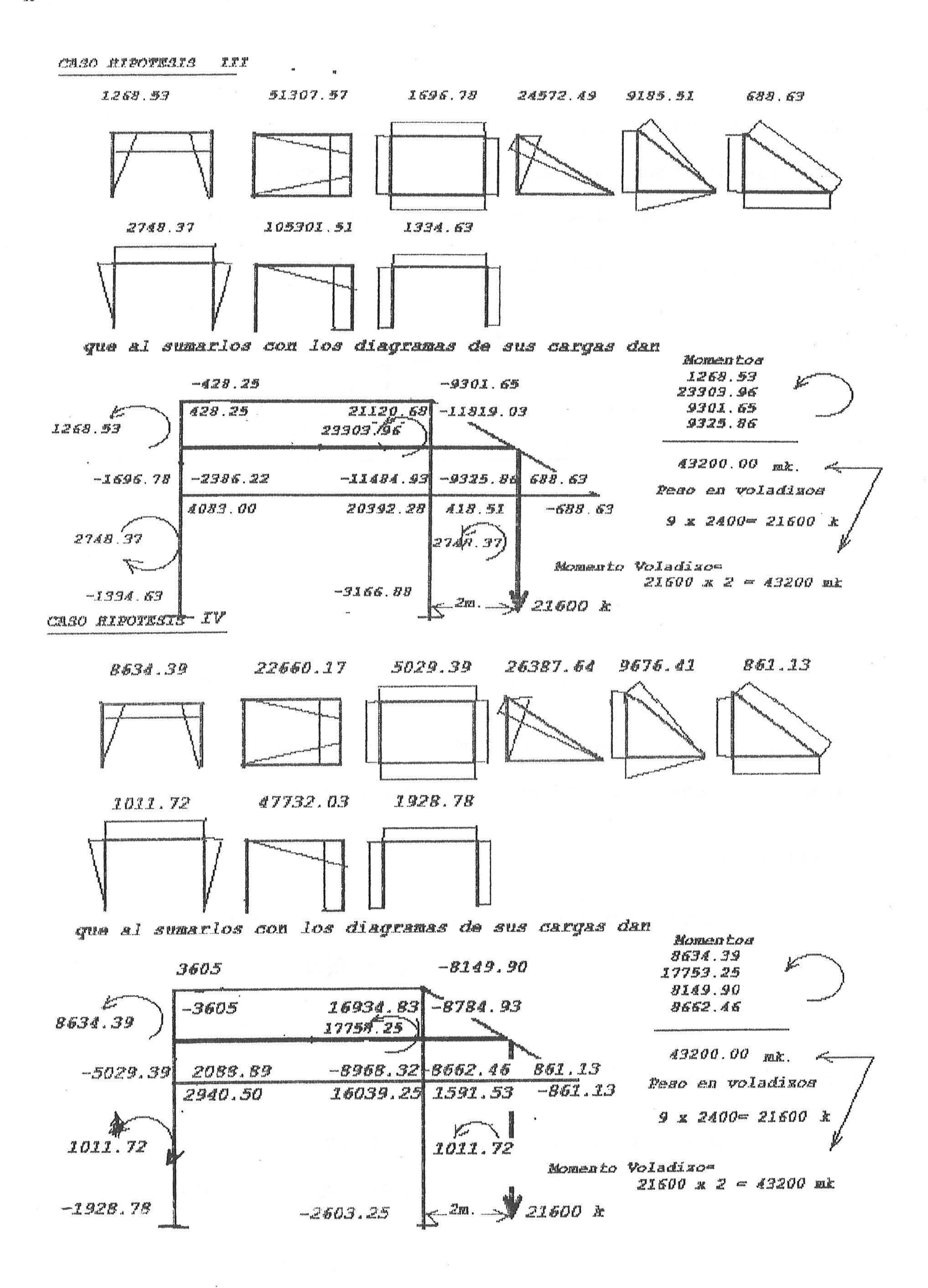
16112.91
21049.92
11288.79
10748.38

59200.00 mk.

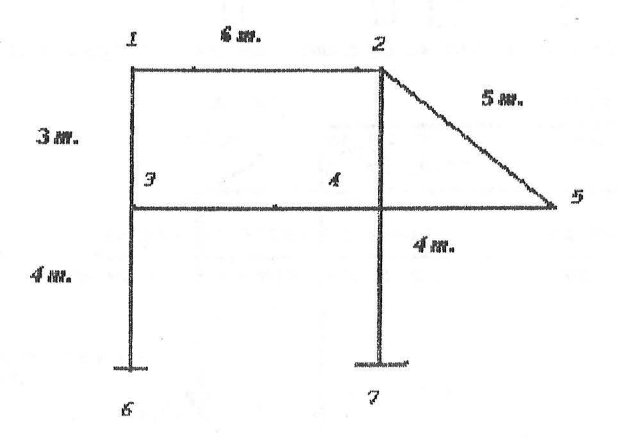
Peso Voladizos

5 x 4000= 20000
4 x 2400= 9600
29600

Momento Voladizo=29600x2=59200 mk


CASO HIPOTESIS III
1268.53
51307.57
1696.78
24572.49
9185.51
688.63
2748.37
105301.51
1334.63
que al sumarlos con los diagramas de sus cargas dan
-428.25
-9301.65
428.25
21120.68
-11819.03
1268.53
23303.96
-1696.78
-2386.22
-11484.93
-9325.86
688.63
4083.00
20392.28
418.51
-688.63
2748.37
2748.37
-1334.63
-3166.88
2m.
21600 k
Momentos
1268.53
23303.96
9301.65
9325.86
43200.00 mk.
Peso en voladizos
9 x 2400= 21600 k
Momento Voladizo=
21600 x 2 = 43200 mk
CASO HIPOTESIS IV
8634.39
22660.17
5029.39
26387.64
9676.41
861.13
1011.72
47732.03
1928.78
que al sumarlos con los diagramas de sus cargas dan
3605
-8149.90
-3605
16934.83
-8784.93
8634.39
17759.25
-5029.39
2089.89
-8968.32
-8662.46
861.13
2940.50
16039.25
1591.53
-861.13
1011.72
1011.72
-1928.78
-2603.25
2m.
21600 k
Momentos
8634.39
17753.25
8149.90
8662.46
43200.00 mk.
Peso en voladizos
9 x 2400= 21600 k
Momento Voladizo=
21600 x 2 = 43200 mk

En los cuatro caso se observa que el momento volcador de las cargas en el triángulo voladizo respecto al pilar inferior derecho, es equilibrado por la suma de los momentos de las barras 1-3, 2-4, 2-5, y 4-5. Utilizando dicha propiedad calculemos la misma estructura con sus cuatro hipótesis por el Método de las Rotaciones, suponiendo igualmente que las barras no pesan



K12=K34=4EI/6= 20 K45=K36=K47=4EI/4= 30 K13=K24=4EI/3= 40 K25=4EI/5= 24

Para saber el comportamiento de las barras del triángulo 245 respecto al desplazamiento del cuadrilátero 1234,aplicamos el Teorema de las Proyecciones para el referido triángulo

Proyecciones verticales

$3\,\alpha 24 - 3\,\alpha 25 = 0$ y como $\Delta 24 = 3\,\alpha 24 = \Delta 1$

y $\Delta 25 = 5\,\alpha 25$ queda

$$\Delta 25 = 5\,\Delta\,1/3$$

Proyecciones horizontales

$4\,\alpha 25 - 4\,\alpha 45 = 0$ y como $\Delta 25 = 5\,\alpha 25$

y $\Delta 45 = 4\,\alpha 45$ queda

$$\Delta 45 = 4\,\Delta\,1/3$$

Por lo que expresando los giros de los nudos 1,2,3,4,y 5 quedan las expresiones de los momentos

			H1	HII	HIII	HIV
M12=	20 θ1 + 10 θ2		--12000	-7200	-12000	-7200
M21=	10 θ1 + 20 θ2		12000	7200	12000	7200
M34=	20 θ3 + 10 θ4		--12000	-7200	-12000	-7200
M43=	10 θ3 + 20 θ4		12000	7200	12000	7200
M25=	24 θ2 + 12 θ5	+ 12 Δ 1	-6666.6	-6666.6	-4000	-4000
M52=	12 θ2 + 24 θ5	+ 12 Δ 1	6666.6	6666.6	4000	4000
M45=	30 θ4 + 15 θ5	+ 15 Δ 1	-3200	-3200	-3200	-3200
M54=	15 θ4 + 30 θ5	+ 15 Δ 1	3200	3200	3200	3200
M13=	40 θ1 + 20 θ3	+ 20 Δ 1				
M31=	20 θ1 + 40 θ3	+ 20 Δ 1				
M24=	40 θ2 + 20 θ4	+ 20 Δ 1				
M42=	20 θ2 + 40 θ4	+ 20 Δ 1				
M36=	30 θ3	+ 11.25 Δ 2				
M63=	15 θ3	+ 11.25 Δ 2				
M47=	30 θ4	+ 11.25 Δ 2				
M74=	15 θ4	+ 11.25 Δ 2				

Equilibrio de Nudos

		HI	HII	HIII	HIV	
1) M12 + M13=	60θ1+10θ2 +20 θ3+ 20 Δ 1	-12000	-7200	-12000	-7200	=0
2) M21+M24+M25 =	10θ1+84θ2 +20θ4 +12θ5+32Δ1	5333.3	533.3	8000	3200	=0
3) M31+M34+M36=	20 θ1+90θ3 +10θ4 +20Δ1+11.25Δ2	-12000	-7200	-12000	-7200	=0
4)M42+M43+M45+M47=	20θ2+10θ3+120θ4+15θ5+35Δ1+11.25Δ2	8800	4000	8800	4000	=0
5) M52 + M54=	12θ2 +15θ4+ 54θ5+ 27Δ1	9866.6	9866.6	7200	7200	=0

Empuje 1-2 (M13+M31+M24+M42+M25+M52+M45+M54)/3 =
20 θ1+32 θ2+20 θ3+35 θ4+27 θ5+44.6Δ 1 19733.3 19733.3 14400 14400=0

Empuje 3-4 (M36+M63+M47+M74)/4 =
11.25 θ3+11.25 θ4+11.25 Δ 2=0

Que ocasiona el sistema de ecuaciones

θ1	θ2	θ3	θ4	θ5	Δ1	Δ2		HI	HII	HIII	HIV
60	10	20	0	0	20	0	=	12000	7200	12000	7200
10	84	0	20	12	32	0	=	-5333.3	-533.3	-8000	-3200
20	0	90	10	0	20	11.25	=	12000	7200	12000	7200
0	20	10	120	15	35	11.25	=	-8800	-4000	-8800	-4000
0	12	0	15	54	27	0	=	-9866.6	-9866.6	-7200	-7200
20	32	20	35	27	44.6	0	=	-19733.3	-19733.3	-14400	-14400
0	0	11.25	11.25	0	0	11.25	=	0	0	0	0

Que resueltos dan los valores

	HI	HII	HIII	HIV
θ 1 =	571.6072	500.0181	467.4275	395.8384
θ 2 =	384.6645	451.1669	222.3201	288.8225
θ 3 =	462.1332	425.5757	361.1759	324.6183
θ 4 =	351.5161	392.1431	239.0260	279.6530
θ 5 =	518.8031	503.7027	388.1753	373.0748
Δ 1 =	-1769.2870	-1791.2133	-1274.6184	-1296.5447
Δ 2 =	-813.6493	-817.7187	-600.2019	-604.2713

que sustituidos en las expresiones de los momentos dan

M12=	3278.78	7312.03	-428.25	3605.00
M21=	25409.36	21223.52	21120.68	16934.83
M34=	757.83	5232.94	-2386.22	2088.89
M43=	23651.65	19298.62	20392.28	16039.24
M25=	-12440.53	-11288.79	-9301.63	-8149.90
M52=	2502.47	2674.97	688.63	861.13
M45=	-11415.78	-10748.37	-9325.87	-8862.46
M54=	-2502.47	-2674.97	-688.63	-861.13
M13=	-3278.79	-7312.03	428.25	-3605.00
M31=	-5468.27	-8800.88	-1696.78	-5029.39
M24=	-12968.84	-9934.73	-11819.04	-8784.93
M42=	-13631.81	-11115.21	-11484.92	-8968.32
M36=	4710.44	3567.93	4083.00	2940.50
M63=	-2221.56	-2815.70	-1334.63	-1928.78
M47=	1391.93	2564.96	418.51	1591.54
M74=	-3880.81	-3317.19	-3166.88	-2603.26

que dan los mismos valores que con el Mètodo de las SY, lo cual demuestra la realidad del equilibrio del momento de vuelco con la suma de los momentos que se han tenido en cuenta de las barras 1-3,2-4, 2-5, y 4-5.

Si en el ejercicio anterior se hubiese considerado el empuje de viento (hacia derecha)de 100 k/m. para el caso primero, al aplicar el Método de las SY se tendrían tres diagramas de momentos que darían

150 → 3m 32 5m
350 → 4m 4m 4m
33 3m
35 34 4m
2000 450

Nº	S	X1	Y1	M1	X2	Y2	M2	X3	Y3	M3
33	675	-1	6	1	0	0	0	1	4	-1
34	1800	0	0	0	-2	6	1	0	0	0
35	4000	0	0	0	-4/3	6	1	0	0	0

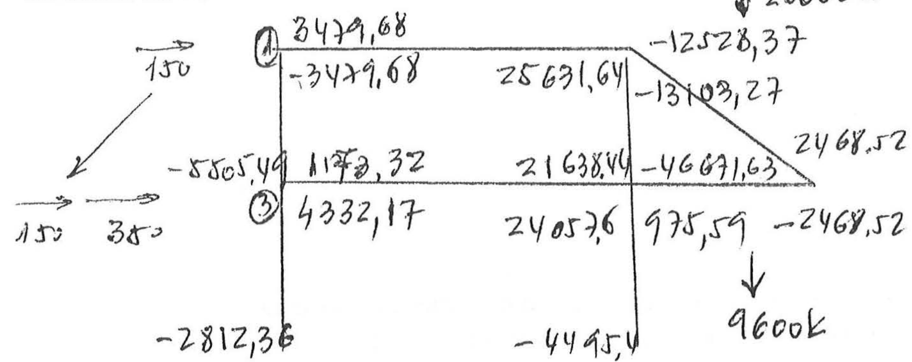
que al considerarlos incluidos en el caso 1º darían los términos independientes del sistema

-575325 571950 95325 -12454466.6 2648400 477400 -6675
258100 -54258.3

que resuelto da

X1= -2995.056 Y1= 7148.114 M1= -5505,487
X2= 379.953 Y2= 14942.96 M2= -2812.357
X3=-11767.60 Y3= 1340.66 M3= -2468.523

Dibujando los diagramas correspondientes y sumandolos da el definitivo



Observese que el par de vuelco viene incrementado por el momento del empuje en nudo 1, con respecto al 3.

-3479,68
-5505,49
-13103,27
21638,44
-12528,37
-46671,63
Suma -59650 mK

Par de vuelco

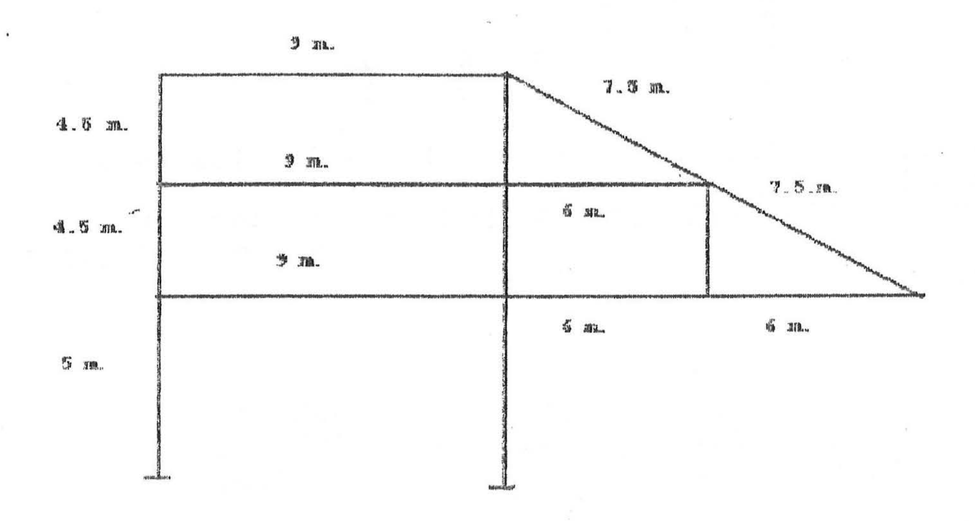
(20000+9600) x 2 = 59200
Viento 150x3 = 450
59650 mK
→ Equilibrio →

Empuje de calculo en nudo 1

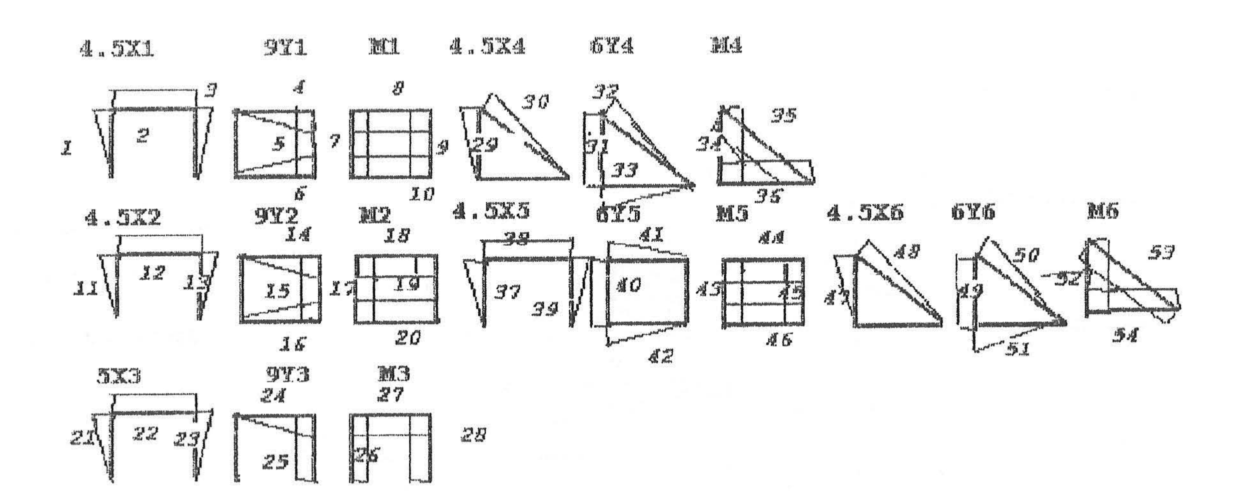
59650/3 = 19883,3 K.

EJERCICIO nº24

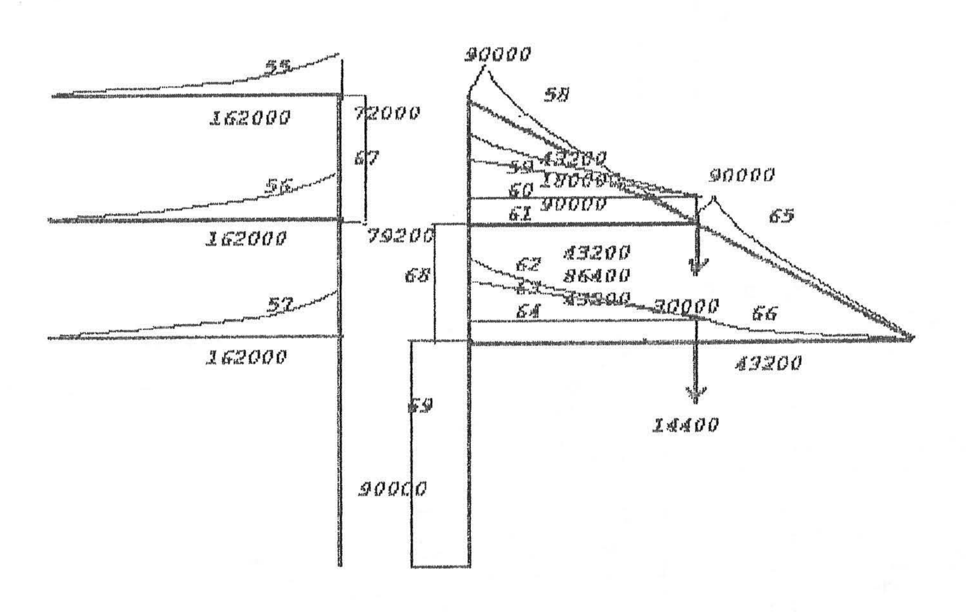
Estudio de la estructura siguiente



Seccionando la estructura en las bases de los pilares que no son centrales se producen seis cortes que ocasionan dieciocho incógnitas que junto a los la hipótesis de carga se obtienen los diagramas de momentos



Hipotesis I



4000X81/2=162000 mk

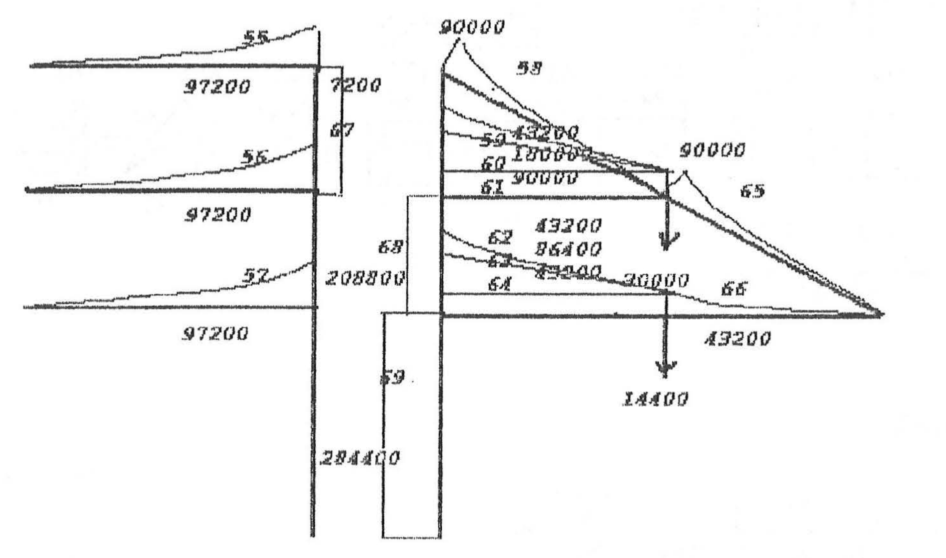
4000X0.8X7.5 ^{2}/2=90000 mk

40000X7.5=30000 k.

2400X36/2=43200 mk

2400X6 = 14400 k.

Hipotesis II

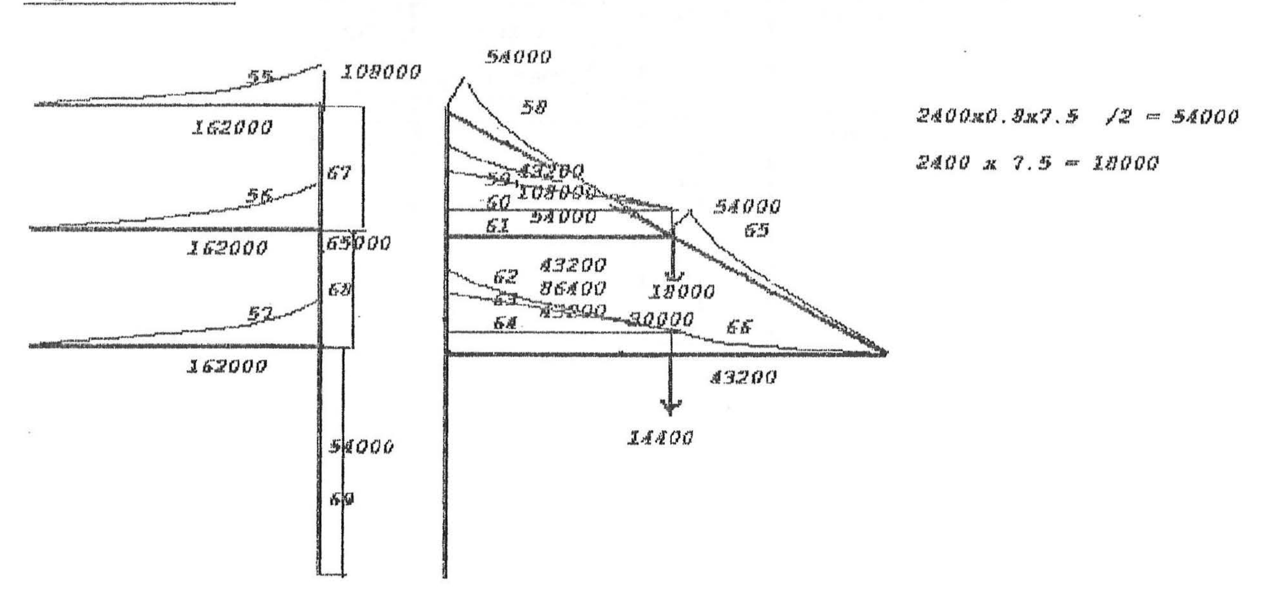


2400X81/2 = 97200 mk.

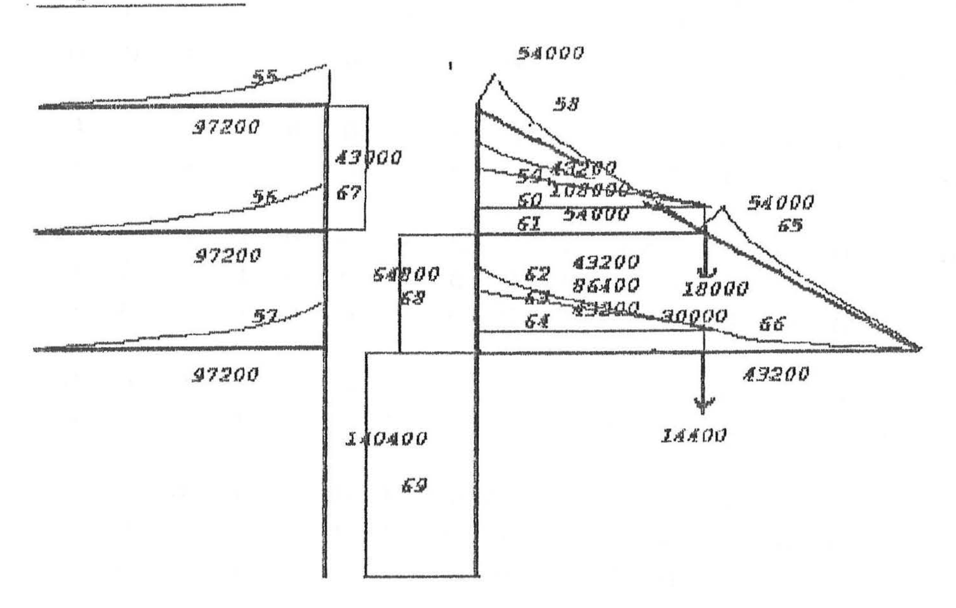
4000X7.5= 30000 K.

2400X6 = 14400 k.

Hipotesis III



Hipotesis IV



Num	S	X1	Y1	M1	X2	Y2	M2	X3	Y3	M3	X4	Y4	M4	X5	Y5	M5	X6	Y6	M6
X1 1	10.125	3	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	40.5	4.5	-4.5	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	10.125	3	-9	-1	0	0	0	0	0	0	3	-6	1	0	0	0	0	0	0
Y1 4	40.5	-4.5	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	40.5	-2.25	9	1	0	0	0	0	0	0	2.25	6	-1	0	0	0	0	0	0
6	40.5	0	6	1	4.5	-6	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M1 7	4.5	-2.25	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	9	-4.5	4.5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	4.5	-2.25	9	1	0	0	0	0	0	0	2.25	6	-1	0	0	0	0	0	0
10	9	0	4.5	1	4.5	-4.5	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X2 11	10.125	0	0	0	3	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	40.5	0	4.5	1	4.5	-4.5	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	10.125	0	0	0	3	-9	-1	0	0	0	0	0	0	-3	-6	1	0	0	0
Y2 14	40.5	0	-6	-1	-4.5	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	40.5	0	0	0	-2.25	9	1	0	0	0	0	0	0	2.25	6	-1	0	0	0
16	40.5	0	0	0	0	6	1	5	-6	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M2 17	4.5	0	0	0	-2.25	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	9	0	-4.5	-1	-4.5	4.5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	4.5	0	0	0	-2.25	9	1	0	0	0	0	0	0	2.25	6	-1	0	0	0
20	9	0	0	0	0	4.5	1	5	-4.5	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

X3	21	12.5	0	0	0	0	0	0	10/3	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	22	45	0	0	0	0	4.5	1	5	-4.5	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	23	12.5	0	0	0	0	0	0	10/3	-9	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Y3	24	40.5	0	0	0	0	-6	-1	-5	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	25	45	0	0	0	0	0	0	-2.5	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M3	26	5	0	0	0	0	0	0	-2.5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	27	9	0	0	0	0	-4.5	-1	-5	4.5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	28	5	0	0	0	0	0	0	-2.5	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X4	29	10.125	-3	9	1	0	0	0	0	0	0	3	6	-1	0	0	0	0	0	0
	30	16.875	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4	-1	0	0	0	0	0	0
Y4	31	27	-2.25	9	1	0	0	0	0	0	0	2.25	6	-1	0	0	0	0	0	0
	32	22.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4	-1	0	0	0	0	0	0
	33	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	-1	0	0	0	0	0	0
M4	34	4.5	2.25	-9	-1	0	0	0	0	0	0	-2.25	-6	1	0	0	0	0	0	0
	35	7.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.25	-3	1	0	0	0	0	0	0
	36	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	1	4.5	3	-1	0	0	0
X5	37	10.125	0	0	0	-3	9	1	0	0	0	0	0	0	3	6	-1	0	0	0
	38	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	1	4.5	3	-1	0	0	0
	39	10.125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	-1	-3	-6	1
Y5	40	27	0	0	0	-2.25	9	1	0	0	0	0	0	0	2.25	6	-1	0	0	0
	41	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4	1	4.5	4	-1	0	0	0
	42	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	-1	0	0	0
M5	43	4.5	0	0	0	2.25	-9	-1	0	0	0	0	0	0	-2.25	-6	1	0	0	0
	44	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-1	-4.5	-3	1	0	0	0
	45	4.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.25	0	1	2.25	6	-1
	46	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	1	0	0	0
X6	47	10.125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	1	3	6	-1
	48	16.875	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4	-1
Y6	49	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.25	0	1	2.25	6	-1
	50	22.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4	-1
	51	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	-1
M6	52	4.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.25	0	-1	-2.25	-6	1
	53	7.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2.25	-3	1
	54	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	1

Términos independientes,con las cuatro hipòtesis

55486000	4.5	-6.75	–1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
291600																		
486000																		
291600																		
56486000	0	6.75	1	4.5	-6.75	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
291600																		
486000																		
291600																		
57486000	0	0	0	0	6.75	1	5	-6.75	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
291600																		
486000																		
291600																		
58225000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.375	4.5	-1	0	0	0	0	0	0
225000																		
135000																		
135000																		
59 86400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4.5	1	4.5	4.5	-1	0	0	0
86400																		
86400																		
86400																		
60 540000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4	1	4.5	4	-1	0	0	0
540000																		
324000																		
324000																		
61 540000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	1	4.5	3	-1	0	0	0
540000																		
324000																		
324000																		
62 86400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4.5	1	0	0	0
86400																		
86400																		
86400																		
63 259200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4	1	0	0	0
259200																		
259200																		
259200																		
64 259200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	1	0	0	0
259200																		
259200																		
259200																		
65 225000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.375	4.5	-1
225000																		
135000																		
135000																		

66	86400 86400 86400 86400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4.5	1
67	324000 324000 486000 194400	2.25	-9	–1	0	0	0	0	0	0	-2.25	-6	1	0	0	0	0	0	0
68	356400 939600 -291600 291600	0	0	0	-2.25	9	1	0	0	0	0	0	0	2.25	6	-1	0	0	0
69	450000 1422000 -270000 702000	0	0	0	0	0	0	-2.5	9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Que operando con el Método da el sistema de ecuaciones con los cuatro vectores de terminos independientes correspondientes a las cuatro hipótesis de cargas

243	-273.4	-60.8	0	0	0	0	0	0	-30.4	-60.8	10.1	0	0	0	0	0	0
-273.4	850.5	121.5	182.3	–243	–40.5	0	0	0	91.1	243	-40.5	0	0	0	0	0	0
-60.8	121.5	27	40.5	–40.5	–9	0	0	0	10.1	27	-4.5	0	0	0	0	0	0
0	182.3	40.5	243	–273.4	–60.8	0	0	0	0	0	0	-30.4	-60.8	10.1	0	0	0
0	-243	-40.5	-273.4	850.5	121.5	202.5	–243	–40.5	0	0	0	91.1	243	–40.5	0	0	0
0	-40.5	-9	-60.8	121.5	7	45	-40.5	-9	0	0	0	10.1	27	-4.5	0	0	0
0	0	0	0	202.5	45	308.3	-315	-70	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-243	-40.5	-315	648	85.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-40.5	-9	-70	85.5	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-30.4	91.1	10.1	0	0	0	0	0	0	81	128.3	-27	0	0	0	0	0	0
-60.8	243	27	0	0	0	0	0	0	128.3	324	-67.5	-81	-72	18	0	0	0
10.1	–40.5	–4.5	0	0	0	0	0	0	-27	-67.5	18	27	18	-6	0	0	0
0	0	0	-30.4	91.1	10.1	0	0	0	0	–81	27	182.3	141.8	–47.3	–30.4	–60.8	10.1
0	0	0	-60.8	243	27	0	0	0	0	-72	18	141.8	306	-63	0	0	0
0	0	0	10.1	–40.5	-4.5	0	0	0	0	18	-6	-47.3	-63	21	10.1	27	-4.5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-30.4	0	10.1	81	128.3	-27
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-60.8	0	27	128.3	324	-67.5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10.1	0	-4.5	-27	-67.5	18

Nota: En la tabla anterior de los coeficientes de las incógnitas se han aproximado las decimas de los números siguientes
-273.4 por –273.375 -60.8 por –60.75 -30.4 por –30.375 -60.8 por –60.75 10.1 por 10.125
182.3 por 182.25 91.1 por 91.125 308.3 por 308.333 128.3 por 128.25 141.8 por 141.75
-47.3 por –47.25

Los términos independientes son para las distintas hipótesis de cargas

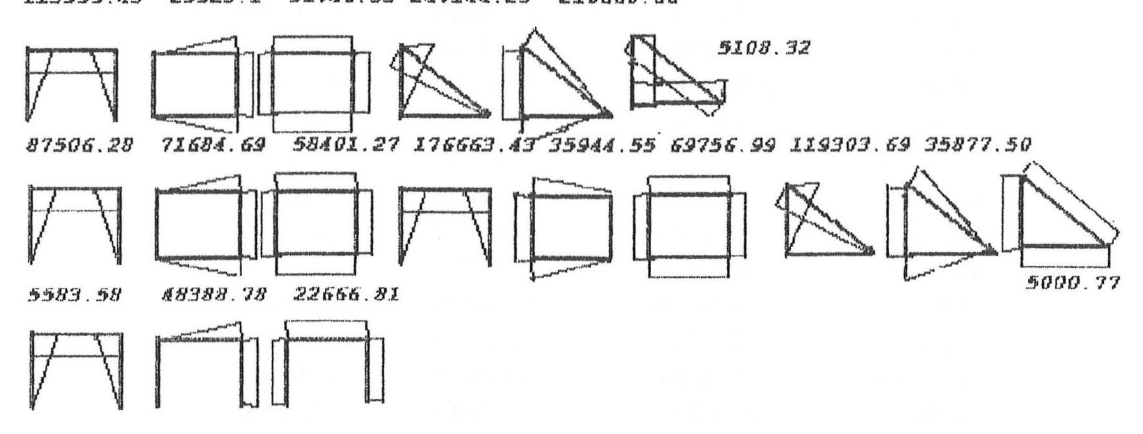
H-I	H-II	H-III	H-IV
-2916000	-1385100	-3280500	-1749600
2916000	291600	4374000	1749600
324000	32400	486000	194400
-1385100	801900	-2843100	-656100
-3207600	-8456400	2624400	-2624400
-356400	-939600	291600	-291600
-1305000	2097000	-3105000	297000
-769500	-10829700	5710500	-4349700
36000	-1130400	756000	-410400
-30375	-686475	637875	-18225
5100300	3350700	4965300	3215700
-1265400	-973800	-1085400	-793800
-6050700	-7362900	-2648700	-3960900
-4104000	-7603200	1296000	-2203200
918000	1501200	-162000	421200
-759375	-759375	-455625	-455625
-623700	-623700	-218700	-218700
138600	138600	48600	48600

Sistemas que resueltos dan para las diferentes incógnitas los valores

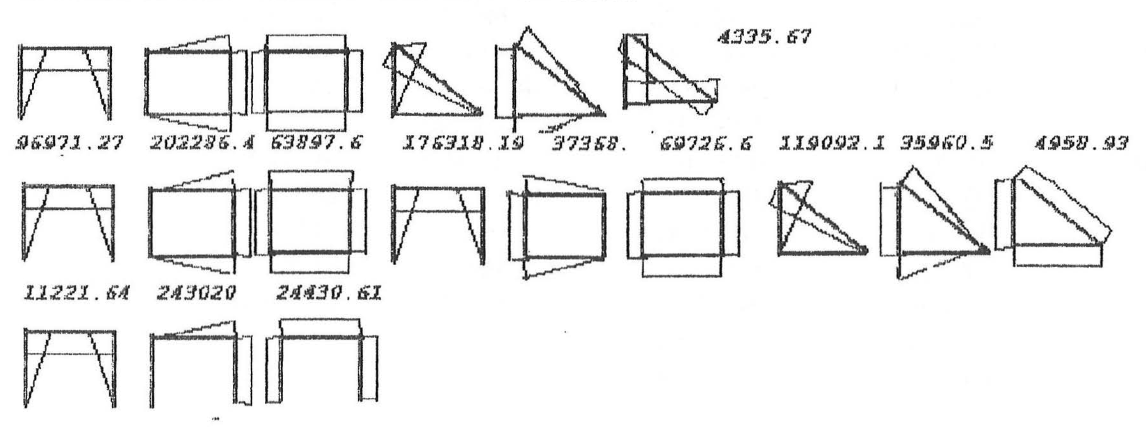
X1	-25777.65	-29315.15	-17132.37	-20669.87
Y1	-2258.34	-9467.28	2877.54	-4331.40
M1	-51746.33	-58476.26	-34766.96	-41496.94
X2	-19445.84	-21549.17	-13204.34	-15307.65
Y2	-7964.97	-22476.27	3125.95	-11385.35
M2	-58401.27	-63897.64	-40189.60	-45685.95
X3	-1116.72	-2244.33	-205.95	-1333.56
Y3	-5376.53	-27002.22	9490.61	-12135.08
M3	-22666.81	-24430.61	-16050.97	-17814.73
X4	-54920.94	-56093.06	-40644.39	-41816.49
Y4	35119.11	35387.57	28843.60	29121.04
M4	5108.32	4335.67	7396.93	6624.26
X5	-39258.54	-39181.82	-28872.91	-28796.20
Y5	5990.76	6228.00	9764.04	10001.29
M5	-69756.99	-69726.58	-61394.96	-61364.57
X6	-26511.93	-26494.91	-19407.11	-19390.10
Y6	5979.58	5993.42	6369.03	6382.86
M6	-5000.77	-4958.93	-1634.54	-1592.70

Valores que llevados a sus diagramas y sumados con sus respectivos de las cargas dan para las distintas hipótesis

Hipòtesis I



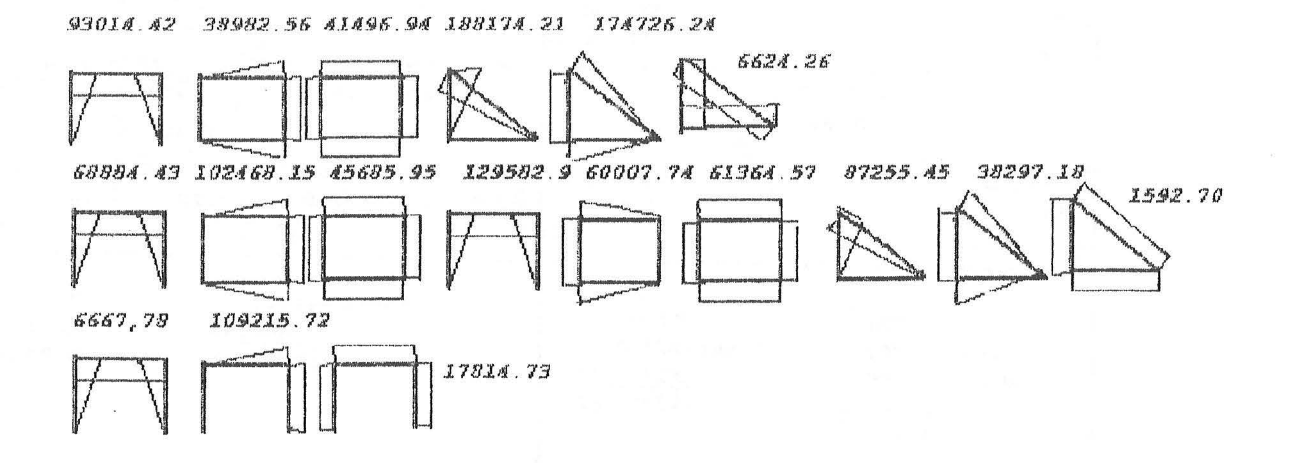
Hipótesis II



Hipótesis III

77095.67 25897.83 34766.96 182899.76 173061.6
7396.93
59413.53 28133.58 40189.6 129928.1 58584.23 61394.96 87332 38214.17 1634.54
1029.75 85415.45
16050.97

Hipótesis IV

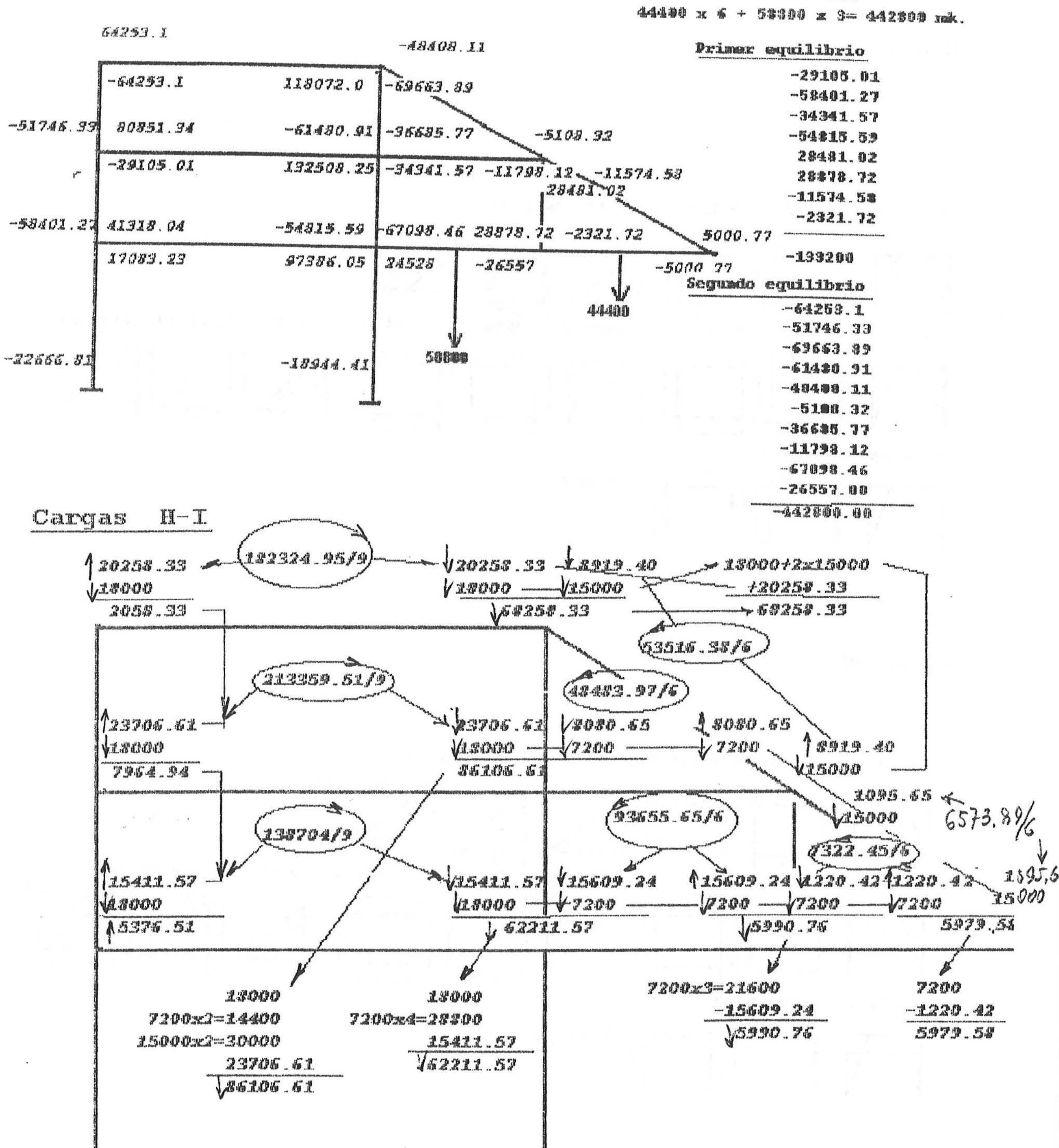


Qu dan los diagramas definitivos al añadirles sus correspondientes de las cargas

Hipotesis I

Pares de vuelco

44400 x 3 = 133200 mk.
44400 x 6 + 58300 x 3= 442800 mk.

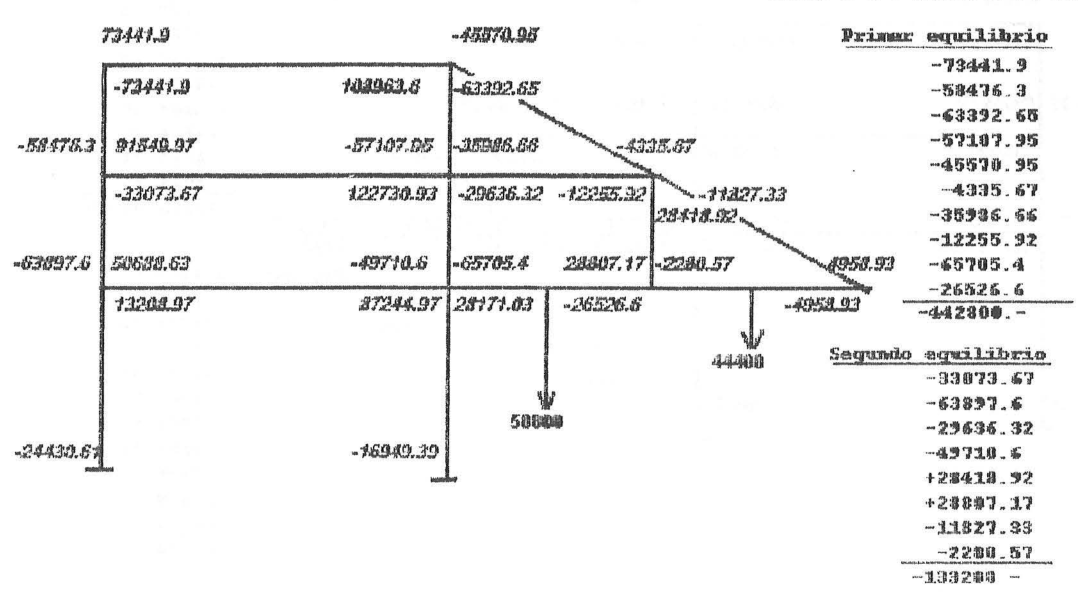


Hipotesis II

Pares de vuelco

44400 x 3 = 133200 mk.

44400 x 6 + 58800 x 3= 442800 mk.



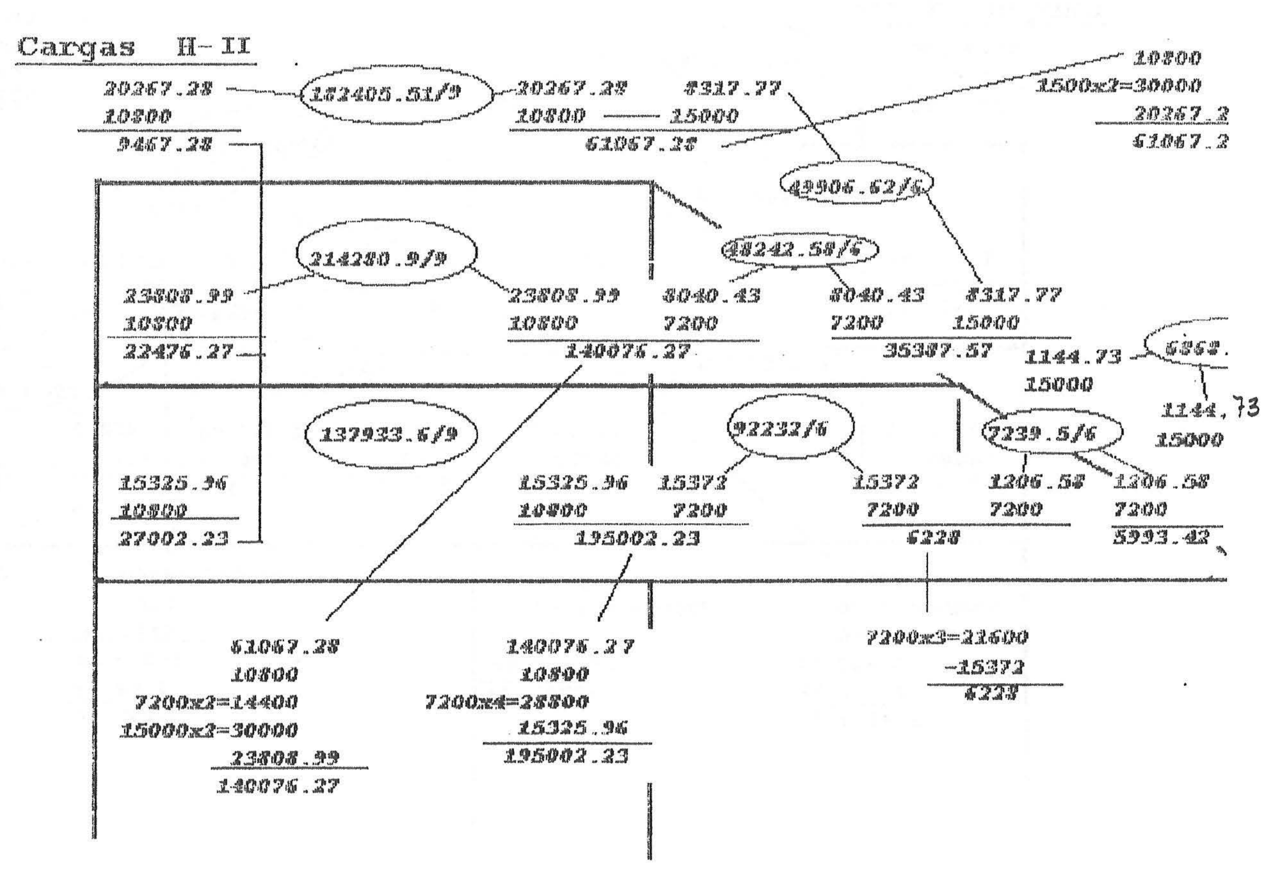
Primer equilibrio

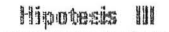
-73441.9
-58476.3
-63392.65
-57107.95
-45570.95
-4335.67
-35986.66
-12255.92
-65705.4
-26526.6
-442800.-

Segundo equilibrio

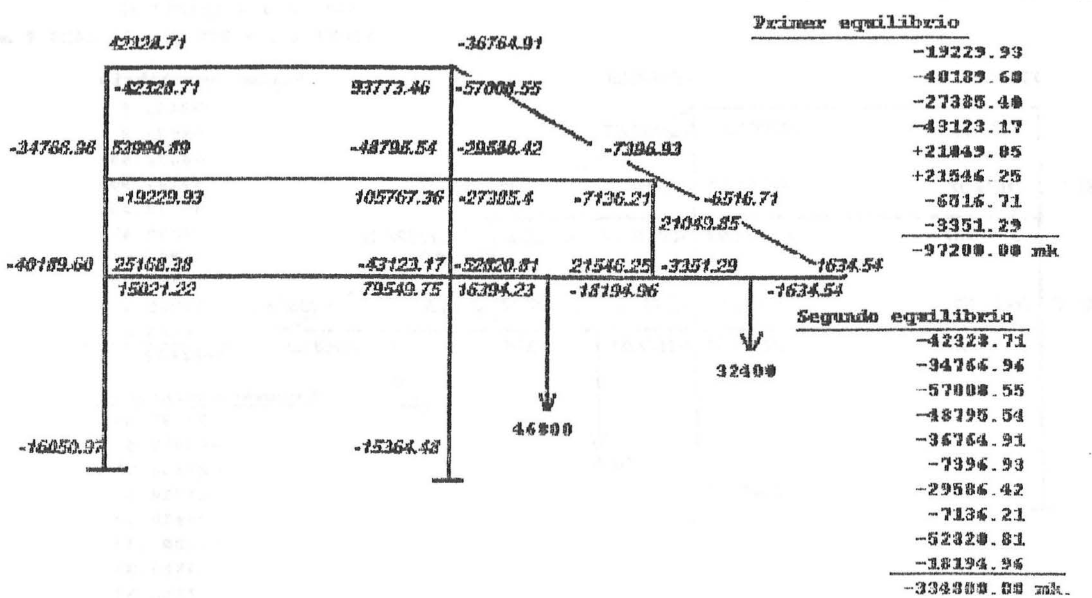
-33073.67
-63897.6
-29636.32
-49710.6
+28418.92
+28807.17
-11827.33
-2280.57
-133200 -

Cargas H-II





Hipotesis III



Pares de vuelco

32400 x 3 = 97200 mk.

32400 x6 + 46800 x3 = 334800 mk.

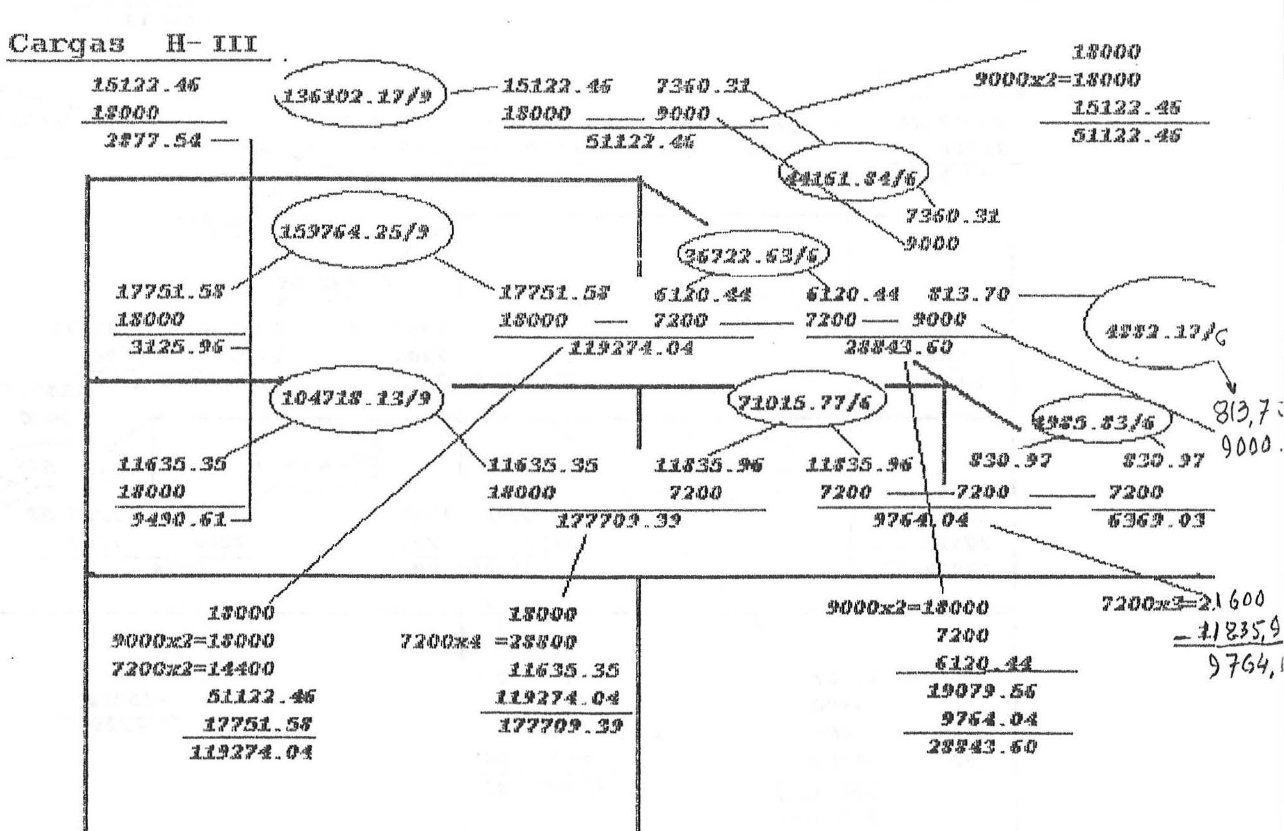
Primer equilibrio

-19229.93
-40189.60
-27385.40
-43123.17
+21049.85
+21546.25
-6516.71
-3351.29
-97200.00 mk

Segundo equilibrio

-42328.71
-34766.96
-57008.55
-48795.54
-36764.91
-7396.93
-29586.42
-7136.21
-52820.81
-18194.96
-334800.00 mk.

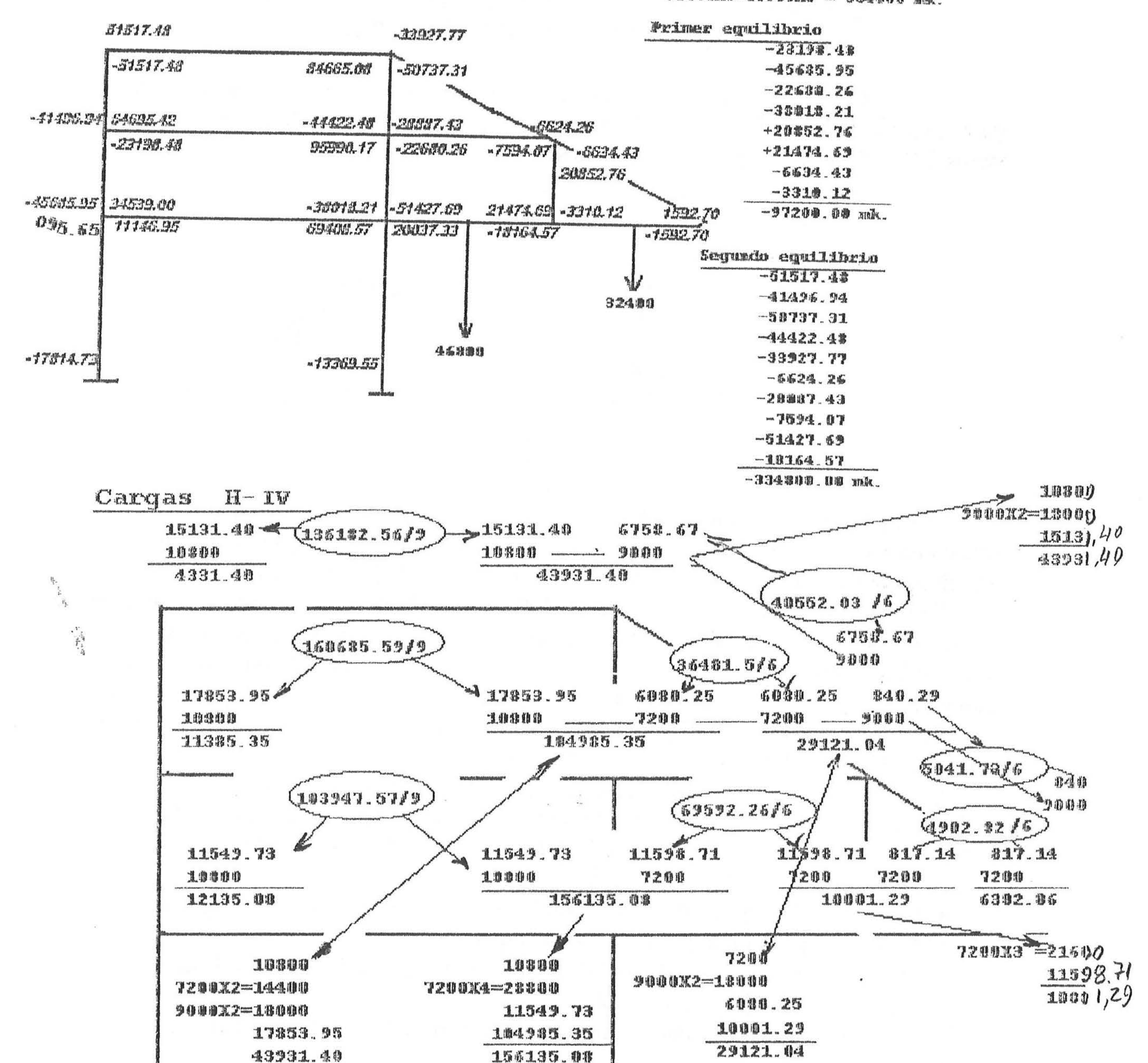
Cargas H-III



Hipotesis IV

Pares de vuelco

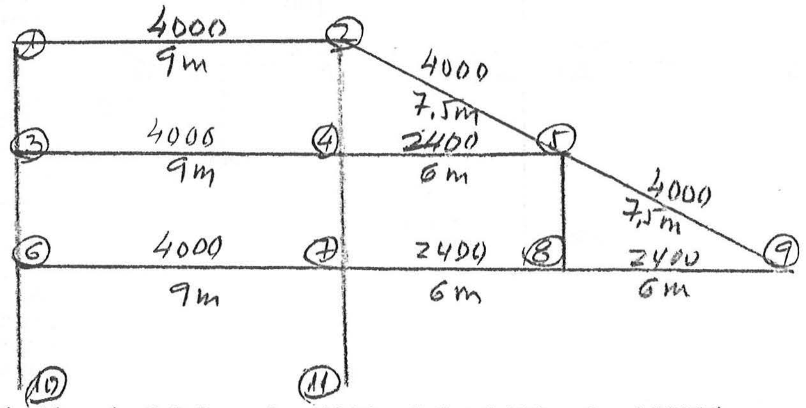
32400 x 3 = 97200 mk.
32400x6+46800x3 = 334800 mk.



112 bi

ACLARACIONES Y CONSECUENCIAS DE LOS DIAGRAMAS DE MOMENTOS DE ESTA ESTRUCTURA

En las cuatro hipótesis de cargas se observan los mismos resultados, que para simplificar, nos referiremos a la primera , que tiene cargas de 4000 k/m. en los vanos 1-2, 2-5, 3-4, 5-9, y 6,7; y de 2400 k/m. en los restantes.



1º) El peso del triángulo 5-8-9 es de 4000 x 7,5 + 2400 x 6 = 44400 k. que da un momento de vuelco respecto al nudo 8 de 44400 x 3 = 133200 mk. que lo equilibran la suma de los momentos de las barras 3-6, 4-7, 5-8, 5-9 , y 8-9.

2º) El peso del trapecio 2-5-8-7 es de 4000 x7.5 + 2 x 6 x 2400 = 58800 k. y para el par de vuelco respecto al nudo 7, debe de tenerse en cuenta el peso del triángulo 5-8-9 aplicado en el nudo 8, o sea : 58800 x 3 + 44400 x 6 = 442800 mk. que queda también equilibrado con la suma de los momentos de las barras 1-3 , 2-4 ,2-5,4-5 y 7-8.

3º) El empuje al nivel 6-7 producido por los pilares 6-10 y 7-11 queda equilibrado = (17083,23 – 22666.81 + 24528 –18944.41) / 5 = 0

4º) Respecto a los resultados de las cargas puede observarse lo siguiente:

En el nudo 2 = Cargas isotáticas 18000 k. del extremo derecho de la barra 1-2 , 2* 15000 k. de la barra 2-5 y 20258.33 k hiperestática de extremo derecho de 1-2, ya que las hiperestáticas de 2-5 se anulan.

En el nudo 4 = Cargas isostáticas 18000 k. del extr. der. 3-4 , 7200 * 2 de barra 4-5, 15000 * 2 de carga en nudo 5 y 23706,61 k. hiperest. de 3-4.

En el nudo 7 = Cargas isostáticas 18000 k. del extr. der. 6-7, 7200 * 4 de barras 7-8 y 8-9 , y 15411.57 de hiperest. de 6-7.

Y en el nudo 8 = Cargas isost. 7200 k de extr.der. de 7-8 ,7200 *2 de barra 8-9 y -15609,24 de hiperest. de 7-8.

Lógicamente en cada nudo las cargas de sus inmediatos superiores. Así

En nudo 1 = 18000 –20258.33 = - 2258.33 k.

En nudo 3 = -2258.33 (de nudo 1) + 18000 – 23706.61 = -7964.94 k.

En nudo 6 =nudo 10 = -7964.94 (de nudo 3) + 18000 –15411.57 = -5376.51 k.

En nudo 11= 68258.33 (nudo 2)+ 86106.61 (nudo 4)+ 62211.57 (nudo 7)=216576.51k

Sumando las cargas de los nudo 10 y 11 dan = 216576.51-5376.51 = 211200 k.

y como el peso de la estructura es de 4000 (3*9 + 7.5 *2) +2400 *3 *6 = 211 200 k. se de-muestra la exactitud de los cálculos y resultados.

APLICACION AL EJERCICIO DEL GRADERIO DE 12 M. DE VOLADA

Teniendo en cuenta las cuatro hipótesis de cargas se han obtenido los momentos máximos en las Vigas (en m.k)

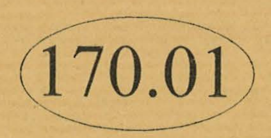
Viga	H-I	H-II	H-III	H-IV
1-2	118072	108963.6	93773.46	84665.08
3-4	132508.25	122730.9	105767.36	95990.17
6-7	97386.05	87244.97	79549.75	69408.57
2.5	48408.11	45570.95	36764.91	33927.77
4-5	36685.77	35986.66	29586.42	28887.43
5-9	11574.58	11827.33	6516.71	6634.43
7-8	67098.46	65705.40	52820.81	51427.69
8-9	2321.72	4958.93	3351.29	3310.12

En Pilares momentos en mk. Y cargas en k..

Pilar		H-I.	H-II	H-III	H-IV
1-3	M =	64253.10	73441.9	42328.71	51517.48
	C =	-2258.33	-9467.28	2877.54	-4331.40
2-4	M =	69663.89	63392.65	57008.55	50737.31
	C =	68258.33	61067.28	51122.46	43931.40
3-6	M =	58401.27	63897.60	40189.60	45685.95
	C =	-7964.94	-22476.27	3125.96	-11386.35
4-7	M =	54815.59	49710.60	43123.17	38018.21
	C =	154364.94	79008.99	119274.04	104985.35
5-8	M =	28878.72	28807.17	21546.25	21474.69
	C =	5990.76	6228.00	9764.04	10001.29
6-10	M =	22666.81	24430.61	16050.97	17814.73
	C =	-5376.51	-27002.23	9490.61	-12135.08
7-11	M =	24528.00	28171.03	16394.23	20037.33
	C =	216576.51	195002.23	177709.39	156135.08

NOTAS

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

